



TITLE:

貨幣的景気循環モデルの日本経済への適用可能性についての分析

AUTHOR(S):

荒戸, 寛樹

CITATION:

荒戸, 寛樹. 貨幣的景気循環モデルの日本経済への適用可能性についての分析. 岩本ゼミナール機関誌 2006, 10: 18-54

ISSUE DATE:

2006-03-24

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/56951>

RIGHT:

貨幣的景気循環モデルの日本経済への 適用可能性についての分析*

荒戸 寛樹

京都大学大学院経済学研究科修士課程
岩本ゼミナール 2005 年度ティーチングアシスタント

目次

- 1 研究の背景, 目的
- 2 貨幣的景気循環モデルの設定
- 3 パラメータの推定
- 4 パラメータの検証
- 5 貨幣的景気循環モデルの評価
- 6 結論と今後の検討課題
- 付録 A データ
- 付録 B 非確率的な定常状態の記述
- 付録 C 対数線形近似
- 付録 D モデルの解

* 本稿は執筆者による同題名の京都大学大学院経済学研究科修士論文に加筆修正を加えたものである。作成にあたり、京都大学経済研究所の中嶋智之助教授、京都大学大学院経済学研究科の岩本武和教授、遊喜一洋助教授からご指導と有益なコメントをいただいた事を心より感謝したい。なお言うまでもないことではあるが、本稿に存在しうる誤りは全て執筆者自身の責任である。

1 研究の背景, 目的

本論文の目的は, 価格の硬直性を導入した確率的一般均衡動学モデルの, 90 年代以降の日本における景気循環に対する説明力を評価し, 政策分析への適用可能性を分析することである。

本章ではこの研究の学術的背景と 90 年代以降の日本経済について概説し, 本論文の目的を述べる。

1.1 貨幣的景気循環理論

景気循環の原因とそれに対する政策を分析することは Keynes [1936] 以来, マクロ経済学の一つの大きな目標であった。その後 Lucas [1976] によるケインジアン批判以降, 合理的期待を持った経済主体による動学的一般均衡モデルによるマクロ経済研究がアメリカを中心に行われてきた。中でも, Kydland and Prescott [1982] を嚆矢とする確率的一般均衡動学モデルによる景気循環の分析は「実物的景気循環理論」と呼ばれ, 景気循環研究の発展に多大な大きな発展をもたらした。実物的景気循環理論は, 新古典派成長理論に労働-余暇選択と確率的に生じる外生的ショックを加えることにより景気循環を説明することを基本的なアイデアとしている。彼らの理論は多くの議論と数値計算を駆使した実証的な分析を経て, 現在では景気循環分析の一つの主流を確立することとなった。^{*1} 近年では実物的景気循環理論に物価水準, 貨幣等の名目変数を導入して実物的景気循環理論を拡張し, 流動性制約や価格の硬直性, 金融仲介における情報の非対称性といった名目変数に関する仮定を組み込むことにより, ケインジアン, マネタリスト的な視点を加えつつルーカス批判に耐えうる景気循環理論として発展を続けている。本論文では貨幣等の名目変数を導入した確率的一般均衡動学モデルを総称して「貨幣的景気循環モデル」と呼ぶ。^{*2}

1.2 90 年代以降の日本経済と金融政策

図 1 は 1981 年から 2003 年までの日本経済における労働者人口一人当たりのマクロ変数を表したものである。^{*3} 1990 年代初頭, 日本経済は実質成長率の急落に直面し, 「失われた 10 年」, 「平成不況」と呼ばれる長期停滞に直面した。この事態を受けて, 日本銀行は 1991 年第一四半期より金融緩和政策を展開することになる。1998 年, 日本銀行はコールレートを出来る限り低く保つ, いわゆる「ゼロ金利政策」を導入した。名目金利はその性質上, 負に設定することは不可能である。これを「名目金利の非負制約」と言う。不況から抜け出すことが出来ぬまま政策金利がゼロに達したことにより従来の金利政策が行えなくなった日本銀行に対して, 様々な政策提言が行われることになる。Krugman [1998] は政策金利がゼロに達した状態を「流動性の罍の再来」と表現し, 政策金利がゼロに達した状態でも日本銀行はインフレ率の目標値を設定し貨幣発行を行うことにより期待インフレ率を上昇させ不況を脱出することが可能であると論じた。

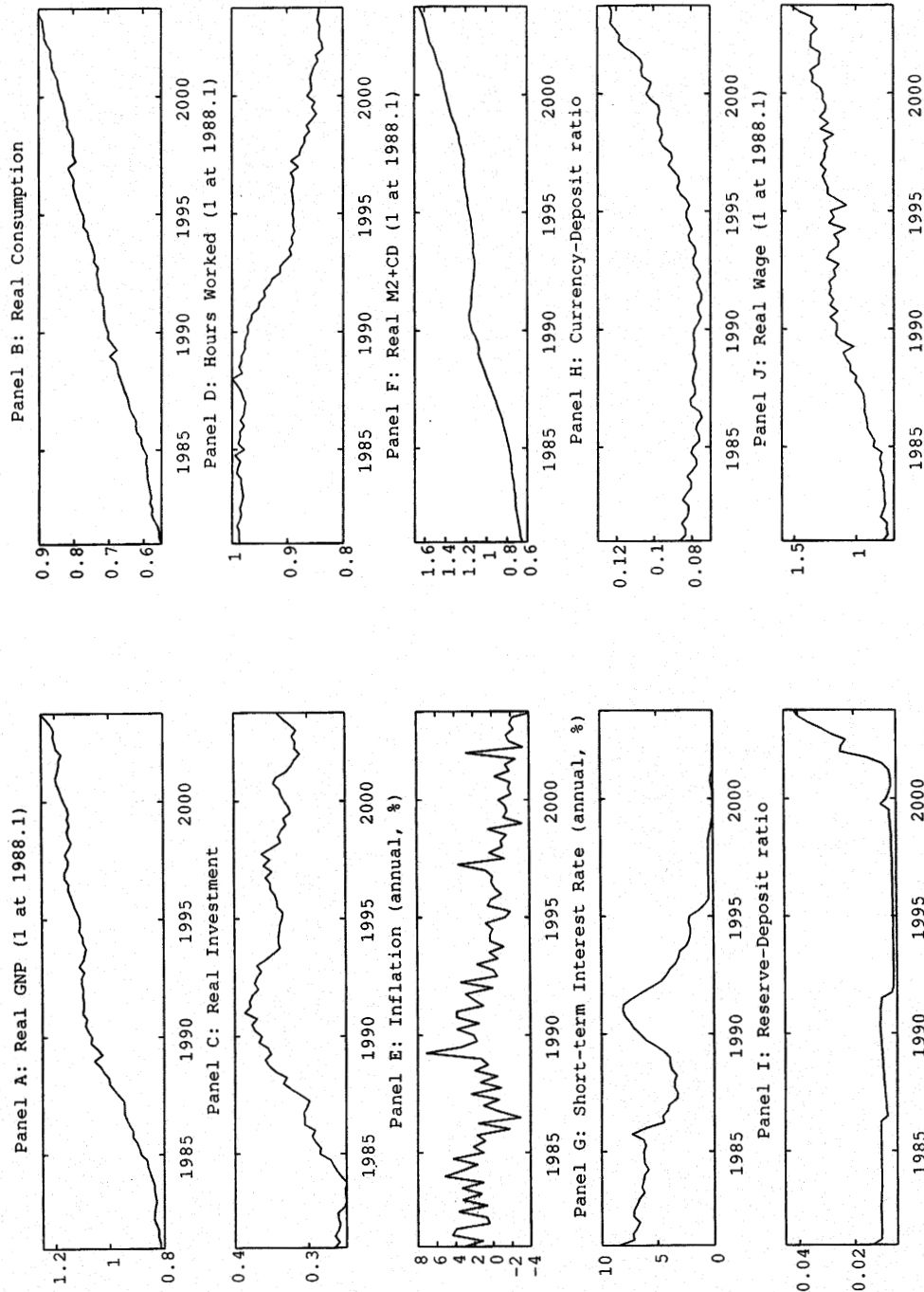
その後一度ゼロ金利政策は解除されるものの, 2001 年, 再びコールレートをほぼゼロに設定し, 政策目標を金利から日銀当座預金残高に変更した。いわゆる「量的緩和政策」である。量的緩和政策は従来の金利メカニズムに基づかない政策であり, その有効性に関しては理論的な研究を中心に議論が行われている。代表的な研究としては Eggertsson and Woodford [2003] が挙げられる。彼らは名目金利の非負制約下での最適金融政策を求め, 名目金利がゼロに留まり続けることを宣言することが最適と論じ, 量的緩和政策は直接的な効果は持たず, 宣言

^{*1} 実物的景気循環理論の解説は Burnside [1999], Cooley [1995] 等を参照。

^{*2} 貨幣的景気循環モデル, 特に金融政策に関する解説は Clarida, Gali and Gertler [1999] 等を参照。

^{*3} 変数の定義は付録 A に示した。

Figure 1 Key Macroeconomic Variable (1981.I to 2003.IV)



の信頼性を強化する手段であると論じた。^{*4}

一方、90年代の日本経済において貨幣的景気循環モデルの現実の説明力に対してどれほどの影響を持つのかという実証的な研究は蓄積がされているとは言えない。日本経済における実物的景気循環理論、貨幣的景気循環理論の説明力に関する実証分析は大日 [1991]、外木 [2002] 等によって行われているが、これらは価格、賃金の硬直性等を導入しておらず、金融政策の議論の実証的基礎研究として使用することは難しい。

1.3 研究の目的と構成

以上の現状を踏まえ、本論文では価格の硬直性を導入した貨幣的景気循環モデルを設定し、近年の日本経済に対するモデルの説明力の評価を行う。具体的な手法は Christiano, Motto and Rostagno [2004] を参考にした。彼らの研究は、貨幣的景気循環モデルに価格、賃金の硬直性や Bernanke, Gertler and Gilchrist [1999] で展開された「フィナンシャル・アクセラレーター仮説」を導入したモデルを用いて、大恐慌の原因究明と、仮想的に貨幣供給を増やした場合のシミュレーションを行い、Friedman-Schwartz 仮説の妥当性を検証している。その過程において彼らは大恐慌時のマクロ経済データを用いてモデルのパラメータ推定を行い、得られたパラメータから計算される経済変数の変動と現実のデータをフィッティングさせ、モデルの評価を行っている。本論文では Christiano, Motto and Rostagno [2004] のモデルを簡略化し、価格の硬直性を持つ貨幣的景気循環モデルを設定し、彼らが用いた手法を参考に日本経済に対するモデルの適用妥当性を分析する。本モデルでは名目金利の非負制約は導入しない。これは名目金利の非負制約がモデルの説明力にどれほどの影響を持つのかを調べるための比較対象として今回の分析を用いるためである。名目金利の非負制約を含んだモデルによる分析は今後の研究課題とする。

研究の最終的な目標は、90年代以降の日本における金融政策の効果を分析し適切な政策提言を行うことであり、本論文はこの目標に対して実証的基礎を与えるという位置づけを持つと考えられる。

論文の構成は以下の通りである。第2章において価格の硬直性を導入した貨幣的景気循環モデルの構築を行う。第3章では、日本経済のデータを用いて、第2章において設定されたモデルの外生的なパラメータを推定する。第4章では前章で得られたパラメータとそこから得られるいくつかの変数に対して検証を行う。第5章ではモデルから得られる経済変数の変動を求め、現実のデータと比較することによりモデルの説明力に関する検証を行う。第6章に結論と今後の課題を記す。

2 貨幣的景気循環モデルの設定

経済主体は中間財企業、最終財企業、銀行、家計、政府（金融当局）の6種からなると仮定する。本章では各主体とマクロの制約条件を定式化する。

2.1 最終財企業

最終財企業は中間財市場において中間財 j を価格 $P_t(j)$ で購入する。購入量を $Y_t(j)$ とする。最終財企業は購入した中間財を以下の Dixit-Stiglitz [1977] 型の生産関数に従って最終財を Y_t 単位生産する。

^{*4} 名目金利の非負制約の下での最適な金融政策の研究は他に Nakajima [2005]、Jung, Teranishi and Watanabe [2005] 等が挙げられる。

$$Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{1}{\lambda_t^f}} dj \right]^{\lambda_t^f}. \quad (1)$$

ただし、 $\lambda_t^f \in (1, \infty)$ であり、後述の確率過程に従うと仮定する。

費用最小化問題は

$$\begin{aligned} \min_{\{Y_t(j)\}} & \int_0^1 P_t(j) Y_t(j) dj \\ \text{s.t. } & Y_t = \left[\int_0^1 Y_t(j)^{\frac{1}{\lambda_t^f}} dj \right]^{\lambda_t^f} \end{aligned}$$

Lagrange 乗数を v_t とすると、費用最小化の一階の条件は

$$P_t(j) = v_t Y_t^{1-\frac{1}{\lambda_t^f}} Y_t(j)^{\frac{1}{\lambda_t^f}-1} \quad (2)$$

両辺を $\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_t^f}}$ 乗し、 $j \in [0, 1]$ で積分することにより v_t を得る。 v_t は最終財一単位を作るために必要な中間財を購入するための費用を表す。よってこれを中間財の価格インデックスとする。均衡では限界費用と価格が等しくなるので、この中間財価格インデックスと最終財価格は等しくなる。これを P_t と表記する。すなわち、

$$P_t \equiv v_t = \left[\int_0^1 P_t(j)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_t^f}}} dj \right]^{1-\lambda_t^f}. \quad (3)$$

これを用いると、(2) 式より、中間財の需要は

$$Y_t(j) = \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\frac{\lambda_t^f}{\lambda_t^f-1}} Y_t \quad (4)$$

で表される。したがって中間財需要の代替の弾力性は $\frac{\lambda_t^f}{\lambda_t^f-1} \in (1, \infty)$ であることが分かる。

2.2 中間財企業

中間財企業 j の生産関数は

$$Y_t(j) = \varepsilon_t K_t(j)^\alpha [z_t l_t(j)]^{1-\alpha} - \phi z_t \quad (5)$$

で表される。ただし、 $\alpha \in (0, 1)$ 。 z_t は非確率的な技術の成長トレンドを表し、その成長率を μ_z とする（すなわち $z_t = \mu_z z_{t-1}$ ）。また ε_t は平均 1 の技術ショックであり、後述の確率過程に従う。 ϕ は固定費用を表し、非確率的な定常状態において利潤がゼロになるように設定される^{*5}。

中間財企業は完全に競争的な生産要素市場から労働と資本を調達すると仮定する。資本のレンタル価格を R_t^k 、賃金率を W_t とする。さらに、中間財企業は生産のための費用を生産に先立って準備する必要がある^{*6}、この費用は銀行からの借り入れでファイナンスすると仮定する。銀行借り入れの名目利子率を R_t とする^{*7}。

^{*5} Christiano, Eichenbaum and Evans [2005] によれば、この固定費用の設定は Basu and Fernald [1994], Hall [1988], Rotemberg and Woodford [1995] 等における、長期での平均利潤はゼロに近いという実証分析によって正当化されている。この設定が日本経済に関しても成立するかという問題は今後の研究課題であるが、本論文ではその問題には立ち入らず、Christiano, Eichenbaum and Evans [2005] の設定に従う。

^{*6} ただし、実際の費用の支払いは期末に行われると仮定する。

^{*7} 厳密には後述のように、銀行貸し出しは企業の要求払い預金口座を通じて行われ、企業は借り入れた要求払い預金から R_t^D の利子率で利息を得られる。 R_t は貸し出し利子率から預金金利を差し引いたものである。

費用関数は

$$C(K_t(j), l_t(j)) = (1 + R_t)[W_t l_t(j) + R_t^k K_t(j)]$$

となることから, Lagrange 乗数を λ_t として, 費用最小化問題の Lagrangian は

$$\mathcal{L} = (1 + R_t)[W_t l_t(j) + R_t^k K_t(j)] + \lambda_t \{Y_t(j) - \varepsilon_t K_t(j)^\alpha [z_t l_t(j)]^{1-\alpha} + \phi z_t\}$$

よって一階条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l_t(j)} = (1 + R_t)W_t - \lambda_t(1 - \alpha)\varepsilon_t K_t(j)^\alpha [z_t l_t(j)]^{-\alpha} z_t = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_t(j)} = (1 + R_t)R_t^k - \lambda_t \alpha \varepsilon_t K_t(j)^{\alpha-1} [z_t l_t(j)]^{1-\alpha} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = Y_t(j) - \varepsilon_t K_t(j)^\alpha [z_t l_t(j)]^{1-\alpha} + \phi z_t = 0 \quad (8)$$

これらから, 資本労働比率

$$\frac{K_t(j)}{l_t(j)} = \frac{K_t^f}{l_t^f} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{W_t}{R_t^k} \quad (9)$$

と, 実質限界費用 s_t

$$s_t = \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\alpha (1 + R_t) \frac{(w_t)^{1-\alpha} (r_t^k)^\alpha}{\varepsilon_t} \quad (10)$$

を得る. ただし, K_t^f, l_t^f はそれぞれ中間財部門で使用される総資本量, 総労働量を表し, $w_t \equiv \frac{W_t}{z_t P_t}$, つまり w_t は $z_t l_t$ 一単位あたりの実質賃金を, また, $r_t^k \equiv \frac{R_t^k}{P_t}$, つまり r_t^k は最終財に対する資本レンタルの相対価格 (すなわち資本一単位あたりの実質粗収益率) をそれぞれ表す. 従って実質利潤は

$$\left(\frac{P_t(j)}{P_t} - s_t \right) Y_t(j) - s_t \phi z_t \quad (11)$$

となる.

第 j 中間財 $Y_t(j)$ を生産する企業は中間財市場において独占的に行動し, 所与の需要曲線 (4) の下で価格 $P_t(j)$ を設定する.

従って, 価格が伸縮的である場合の利潤最大化問題は

$$\max_{P_t(j)} \left(\frac{P_t(j)}{P_t} - s_t \right) \left(\frac{P_t(j)}{P_t} \right)^{-\frac{\lambda_t^f}{\lambda_t^f - 1}} Y_t - s_t \phi z_t$$

一階の条件は

$$\frac{P_t(j)}{P_t} = \lambda_t^f s_t.$$

つまり, 価格が伸縮的な場合, 中間財企業は λ_t^f のマークアップ率で価格を設定する.

ここで価格の硬直性を導入するため, Calvo [1983] に従い, 各期において中間財企業のうち $1 - \xi_p$ の割合の企業のみが価格を最適に再設定でき, のこり ξ_p の割合の企業はインフレ率 $\pi_{t-1} \equiv \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}}$ と同率で価格を変更すると仮定する. これにより, 価格を最適に再設定する企業は全て同じ価格 \tilde{P}_t に設定し, それ以外の企業については $P_t(j) = \pi_{t-1} P_{t-1}(j)$ となる.

t 期に価格を再設定する企業は、需要曲線 (4) を所与として、次に価格を再設定するまでの期待利潤を最大化するように \tilde{P}_t を設定する。 t 期に価格を再設定し、それ以降価格を再設定しない企業が生産する中間財の $t+l$ 期での価格は $\tilde{P}_t X_{t,l}$ となる。ただし、

$$X_{t,l} \equiv \begin{cases} \pi_t \times \pi_{t+1} \times \cdots \times \pi_{t+l-1}, & \text{if } l \geq 1 \\ 1, & \text{if } l = 0 \end{cases} \quad (12)$$

従ってこの企業の $t+l$ 期での利潤は $(\tilde{P}_t X_{t,l} - s_{t+l})Y_{t+l}(j) - s_{t+l}\phi z_{t+l}$ となる。 t 期に価格を再設定した企業が $t+l$ 期まで価格を再設定しない確率は $(\xi_p)^l$ 。これより、 t 期に価格を再設定した企業の、次に価格を再設定するまでの期待利潤は

$$E_t \sum_{l=0}^{\infty} (\xi_p)^l Q_{t,t+l} [\tilde{P}_t X_{t,l} - s_{t+l} P_{t+l}] Y_{t+l}(j) - P_{t+l} s_{t+l} \phi z_t \quad (13)$$

と書くことができる。ただし、

$$Q_{t,t+l} \equiv \begin{cases} \frac{1}{1+R_t^D} \times \frac{1}{1+R_{t+1}^D} \times \cdots \times \frac{1}{1+R_{t+l-1}^D}, & \text{if } l \geq 1 \\ 1, & \text{if } l = 0 \end{cases} \quad (14)$$

である。よって企業の利潤最大化問題は (4), (13) より

$$\max_{\tilde{P}_t} E_t \sum_{l=0}^{\infty} (\xi_p)^l Q_{t,t+l} [\tilde{P}_t X_{t,l} - s_{t+l} P_{t+l}] \left(\frac{\tilde{P}_t}{P_{t+l}} \right)^{-\frac{\lambda_{t+l}^f}{\lambda_{t+l}^f - 1}} Y_{t+l} - P_{t+l} s_{t+l} \phi z_t. \quad (15)$$

一階の条件は

$$E_t \sum_{l=0}^{\infty} (\xi_p)^l Q_{t,t+l} [\tilde{P}_t X_{t,l} - \lambda_{t+l}^f s_{t+l} P_{t+l}] Y_{t+l}(j) = 0 \quad (16)$$

2.3 金融仲介機関

金融仲介機関（以下「銀行」とする）は家計から要求払い預金（利子率 R_t^D ）を受け入れ、それを原資として企業、投資家への貸し出しを行う。要求払い預金の作成には技術を必要とし、技術は以下の生産関数で表される。

$$\frac{D_t}{P_t} = d \left(K_t^b, l_t^b, z_t, \frac{E_t}{P_t} \right) \equiv a_b [(K_t^b)^\alpha (z_t l_t^b)^{1-\alpha}]^{\xi^b} \left(\frac{E_t}{P_t} \right)^{1-\xi^b} \quad (17)$$

d は要求払い預金の実質残高、 $\xi^b \in (0, 1)$, a_b は定数、 l_t^b, K_t^b はそれぞれ銀行部門で使用される労働、資本、 E_t は超過準備を表す。

銀行は要求払い預金サービスの供給に資本と労働を必要とするが、これらに関わる費用はサービスの生産に先立って準備する必要があると仮定する*⁸。

銀行が得るキャッシュフローは2種類である。一つは家計から受け入れた要求払い預金 A_t 、もう一つは中央銀行が新たに供給するマネタリーベース X_t である*⁹。銀行の資産 D_t はこれらのキャッシュフローに貸し出し残高 S_t を加えたものである。貸し出しは中間財企業と銀行による投入と投資家の資本財購入をファイナンスするために使われる。従って

$$D_t = A_t + X_t + S_t \quad (18)$$

*⁸ ただし、中間財企業と同様に、生産要素への支払いは期末に行われると仮定する。

*⁹ 中央銀行による新たなマネタリーベースの供給は家計の預金の形で行われる。

中央銀行は銀行に対して、要求払い預金のうち最低 τ の割合を準備として預け入れるよう義務付ける。従って銀行の超過準備 E_t は、インターバンク市場での借り入れを F_t として^{*10}

$$E_t = A_t + X_t + F_t - \tau D_t \quad (19)$$

で与えられ、 $E_t \geq 0$ が満たされていなければならない。(17) は稲田条件を満たしており、従ってこの制約は binding しない。

以上より銀行の利潤 B_t は、インターバンク金利を R_t^b として

$$B_t = R_t S_t - R_t^d (A_t + X_t) - (1 + R_t)(W_t l_t^b + r_t^k P_t K_t^b) - R_t^b F_t \quad (20)$$

となり、銀行は t 期のショック後に (17), (18), (19) の下で (20) を最大化するよう $S_t, A_t, l_t^b, K_t^b, E_t, F_t$ を決定する。

(20) に (18) を、(17) に (18), (19) を代入して、最大化問題は

$$\max_{S_t, A_t, l_t^b, K_t^b} R_t S_t - R_t^d (A_t + X_t) - (1 + R_t)(W_t l_t^b + r_t^k P_t K_t^b) - R_t^b F_t \quad (21)$$

$$\text{s.t. } \frac{A_t + X_t + S_t}{P_t} = a_b [(K_t^b)^\alpha (z_t l_t^b)^{1-\alpha}]^{\xi^b} \left(\frac{A_t + X_t + F_t - \tau(A_t + X_t + S_t)}{P_t} \right)^{1-\xi^b} \quad (22)$$

Lagrange 乗数を μ_t とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A_t, S_t, l_t^b, K_t^b, \lambda_t) = & R_t S_t - R_t^d (A_t + X_t) - (1 + R_t)(W_t l_t^b + r_t^k P_t K_t^b) - R_t^b F_t \\ & + \mu_t \left[\frac{A_t + X_t + S_t}{P_t} - d \left(K_t^b, l_t^b, z_t, \frac{(1 - \tau)(A_t + X_t) + F_t - \tau S_t}{P_t} \right) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

一階の条件は

$$A_t : -R_t^d + \mu_t \left[\frac{1}{P_t} - d_{et} \frac{1 - \tau}{P_t} \right] = 0 \quad (24)$$

$$S_t : R_t + \mu_t \left[\frac{1}{P_t} - d_{et} \frac{-\tau}{P_t} \right] = 0 \quad (25)$$

$$l_t^b : -(1 + R_t)W_t + \mu_t d_l = 0 \quad (26)$$

$$K_t^b : -(1 + R_t)r_t^k P_t + \mu_t d_K = 0 \quad (27)$$

$$\mu_t : \frac{A_t + X_t + S_t}{P_t} - d = 0 \quad (28)$$

$$F_t : -R_t^b - \mu_t d_{ef} \frac{1}{P_t} = 0 \quad (29)$$

^{*10} インターバンク市場からの借り入れはマクロの需給一致条件と銀行が同質的であることから 0 になる。

(24), (25), (26), (27), (29) より,

$$(1 + R_t)r_t^k = \frac{d_{kt}}{1 + \tau d_{et}} R_t \quad (30)$$

$$\frac{(1 + R_t)W_t}{P_t} = \frac{d_{lt}}{1 + \tau d_{et}} R_t \quad (31)$$

$$R_t^D = \frac{(1 - \tau)d_{et} - 1}{1 + \tau d_{et}} R_t \quad (32)$$

$$\frac{K_t^b}{l_t^b} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{W_t}{R_t^k} \quad (33)$$

$$R_t^b = \frac{d_{et} R_t}{1 + \tau d_{et}} \quad (34)$$

ただし, d_{xt} は $d(K_t, l_t, z_t, e_t^r)$ の, $x(= K_t, l_t, z_t, e_t^r)$ に関する微分を表す.

(9) と (33) より, 中間財企業と銀行では資本労働比率が等しいことがわかる. したがって均衡では経済の全資本量に対する中間財企業部門での資本量の比率と経済の全労働供給に対する中間財企業部門での労働量の比率は等しくなる. 以下ではこの比率を v_t と表す.

2.4 家計

代表的家計の選好を以下の効用関数で表す.

$$E_t \sum_{l=0}^{\infty} \beta^l \left\{ \log C_{t+l} + \zeta_{t+l} \psi_L \log(1 - l_{t+l}^s) + v_{t+l} \theta \log \frac{M_{t+l}}{P_{t+l}} \right\} \quad (35)$$

ただし, ζ_t, v_t はそれぞれ平均 1 の労働供給ショック, 平均 1 の流動性選好ショックを表す.

家計の資産制約式は

$$M_{t+1}^b = (1 + R_t^D)[M_t^b - M_t + X_t] + M_t + W_t l_t + r_t^k P_t K_t + \text{Profit}_t - P_t C_t + P_t I_t \quad (36)$$

となる. ただし, M_t^b は t 期首のマネタリーベース, M_t は t 期に家計が保有する現金, C_t は消費, Profit_t は企業と銀行から家計が受け取る利潤, I_t は投資を表し,

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (37)$$

を満たすとする. Lagrange 乗数を u_t とすると^{*11}, 一階の条件は

$$C_t : \frac{1}{C_t} = \psi_t \quad (38)$$

$$M_{t+1}^b : \psi_t = \beta E_t \psi_{t+1} \frac{1 + R_{t+1}^D}{\pi_{t+1}} \quad (39)$$

$$l_t : \zeta_t \psi_L \frac{1}{1 - l_t} = \psi_t z_t w_t \quad (40)$$

$$K_{t+1} : \psi_t = \beta E_t \psi_{t+1} [r_{t+1}^k + (1 - \delta)] \quad (41)$$

$$M_t : \frac{\theta v_t}{M_t} = \psi_t \frac{R_t^D}{P_t} \quad (42)$$

ただし, $\psi_t = P_t u_t$ である.

^{*11} つまり u_t は t 期における貨幣の限界効用を表す.

2.5 外生的ショック

本モデルには4種類の外生的ショックが存在する。外生的ショックを列挙すると以下のようになる。

- λ_t^f : 中間財企業の市場独占力ショック
- ε_t : 中間財企業の生産性ショック
- ζ_t : 家計の労働供給ショック
- v_t : 家計の流動性選好ショック

本モデルでは各ショックの定常状態からの百分率乖離 $\hat{\lambda}_t^f, \hat{\varepsilon}_t, \hat{\zeta}_t, \hat{v}_t$ が AR(1) の確率過程に従うと仮定する。例えば $\hat{\lambda}_t^f$ に関しては、その貨幣的な反応を x_t^f とすると

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_t^f \\ \hat{\varphi}_t^f \\ x_t^f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_f^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{t-1}^f \\ \hat{\varphi}_{t-1}^f \\ x_{t-1}^f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_t^f \\ \hat{\varphi}_t^f \\ \theta_f^0 \hat{\varphi}_t^f \end{pmatrix} \quad (43)$$

に従う。他のショックについても同様に定式化を行う。

ショックに関するこれらの確率過程をまとめて行列表現すると

$$\Psi_t = \rho \Psi_{t-1} + D \varphi_t \quad (44)$$

と表せる。 Ψ_t は各外生的ショックとその貨幣的反應からなる 12×1 のベクトル、 ρ, D は 12×12 行列である。さらに φ_t は 12×1 の確率変数ベクトルであり、平均ゼロで、 $\varphi_t, \Psi_t, l \geq 0$ と相関を持たないと仮定する。 φ_t を以下では「イノベーション」と呼ぶ。

2.6 中央銀行

金融政策については、先行研究において様々に異なる定式化がなされている。定式化には大きく分けて利子率操作とマネタリーベースの操作の2種類が存在するが、日本経済の分析を行うにあたって、量的緩和政策の効果に対する分析を避けて通ることは不可能である。そこで本論文では、Christiano, Motto and Rostagno [2004] に従い、金融当局によるマネタリーベースの供給は家計の預金に対して行われるとし、金融当局はマネタリーベースの増加率 x_t を操作することによって金融政策を行うと仮定する。すなわち、金融政策ルールは以下のよう定式化される。

$$M_{t+1}^b = (1 + x_t) M_t^b. \quad (45)$$

ここで前節の結果を用いると、

$$\hat{x}_t = \sum_{i=0}^4 x_t^i \quad (46)$$

ただし、 x_t^i ($i = 1, 2, 3, 4$) はそれぞれ $\hat{\lambda}_t^f, \hat{\varepsilon}_t, \hat{\zeta}_t, \hat{v}_t$ に対する貨幣的反應を、 x_t^0 は外生的な金融政策による貨幣の変動とし、本モデルにおいては $x_t^0 = 0$ とする。

2.7 市場均衡

この節ではモデルの市場均衡を定義する。市場均衡条件は以下の通り。

- $\{M_{t+1}^b, M_t, l_t, C_t, I_t, K_{t+1}\}, \{l_t^f, K_t^f, \tilde{P}_t, Y_t\}, \{l_t^b, K_t^b, S_t, A_t, E_t, D_t\}, \{R_t^D, R_t, P_t, W_t, r_t^k, X_t\}$ は以下の市場均衡において以下の条件を満たす。
 1. 家計の最適化: $\{M_{t+1}^b, M_t, l_t, C_t, I_t, K_{t+1}\}$ は $\{R_t^D, P_t, W_t, r_t^k, X_t\}$ を所与として、資産制約 (36) と資本動学式 (37) の下で効用を最大化する。
 2. 企業の最適化: $\{l_t^f, K_t^f, \tilde{P}_t, Y_t\}$ は $\{R_t^D, R_t, P_t, W_t, r_t^k\}$ を所与として、企業の利潤を最大化する。
 3. 銀行の最適化: $\{l_t^b, K_t^b, S_t, A_t, E_t, D_t\}$ は $\{R_t^D, R_t, W_t, r_t^k, X_t\}$ を所与として、制約条件 (17), (18), (19) の下で銀行の利潤を最大化する。
 4. 需給一致条件: 最終財市場, 労働市場, 資本市場, 資金市場, 預金市場の需給が一致する。すなわち

$$Y_t = C_t + I_t \quad (47)$$

$$l_t = l_t^s + l_t^b \quad (48)$$

$$K_t = K_t^f + K_t^b \quad (49)$$

$$S_t = W_t(l_t^f + l_t^b) + r_t^k P_t(K_t^f + K_t^b) \quad (50)$$

が成立する。

3 パラメータの推定

本節の目標はモデルの評価に必要なパラメータの値を推定することである。まずモデルの外生的なパラメータを

1. 非確率的なパラメータ
2. 確率過程を支配するパラメータ

の2つに分ける。本論文ではまず非確率的なパラメータについて、Cooley and Prescott [1995], 外木 [2002], Cristiano, Motto and Rostagno [2004] の手法を参考にしてカリブレーションを行い、次に確率過程を支配するパラメータを Hamilton [1994] に基づき、カルマン・フィルターを用いた最尤法によって推定する^{*12}。

3.1 非確率的なパラメータ

非確率的なパラメータはモデルの非確率的な定常状態を記述する式とデータの平均値から推定される。

以下のように変数を定義する。

$$i_t = \frac{I_t}{z_t}, \quad v_t = \frac{l_t^f}{l_t} = \frac{K_t^f}{K_t}, \quad m_t^b = \frac{M_t^b}{z_t}, \quad m_t = \frac{M_t}{M_t^b}, \quad c_t = \frac{C_t}{z_t}, \quad k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{z_t}.$$

とし、 e_t^v は銀行部門の実質付加価値に対する実質超過準備の割合、すなわち

$$e_t^v = \frac{\frac{A_t + X_t - \tau(A_t + X_t + S_t)}{P_t}}{(z_t(1 - v_t)k_t/\mu_z)^\alpha (z_t(1 - v_t)l_t)^{1-\alpha}} \quad (51)$$

と定義する。非確率的な定常状態ではこれらの値は一定となる。内生変数の非確率的な定常状態での値は、それ

^{*12} 本論文ではパラメータ推定の手法を習得する目的と計算の簡便さを考慮し、この手法を用いた。本来であれば全てのパラメータを最尤法、もしくは一般化モーメント法 (GMM) を用いて推定すべきであるが、これは今後の研究課題とする。

ぞれの変数の下添え字 t をはずすことによって表現する。定常状態をあらわす方程式体系は付録 B に示した。以下ではこれを用いて非確率的なパラメータの推定を行う。

まず α を求める。Cobb-Douglas 型の生産関数の性質より、 α は資本分配率であることが分かっている。従って、

$$\alpha = \frac{\text{資本所得}}{\text{国民総生産}}$$

と表せる。従ってモデルと整合的な資本所得に関するデータが得られればよい。国民経済計算における国民所得の分配は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} \text{国民総生産} = & \text{雇用者報酬} + \text{財産所得} + \text{企業所得 (混合所得除く)} \\ & + \text{混合所得} + (\text{間接税-補助金}) + \text{固定資本減耗} + \text{誤差} \end{aligned}$$

このうち、財産所得、企業所得 (混合所得を除く)、固定資本減耗は資本所得とみなしてよい。さらに、混合所得、間接税-補助金、誤差に関しては労働と資本のどちらに分配されるか曖昧な部分である。本論文ではこれらに対してはマクロの分配率と同じ比率で分配されるものと仮定する。従って、

$$\begin{aligned} \text{資本所得} = & \text{財産所得} + \text{企業所得} - \text{混合所得} + \text{固定資本減耗} \\ & + \alpha [\text{混合所得} + (\text{間接税-補助金}) + \text{誤差}] \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\alpha = \frac{\text{財産所得} + \text{企業所得} - \text{混合所得} + \text{固定資本減耗}}{\text{国民総生産} - \text{混合所得} - (\text{間接税-補助金}) - \text{誤差}}$$

が得られ、データの値から α が得られる。

μ_z は労働生産性上昇率を表しており、定常状態ではこれは産出の成長率に等しい。よって μ_z をデータから得られる産出の成長率の平均値と設定する。次に資本の減価率 δ を求める。付録 B (73) 式より、

$$\delta = \frac{i}{k/\mu_z} - (\mu_z - 1)$$

から δ が得られる。次に割引因子 β を求める。付録 (71) 式と資本分配率の定義 $\alpha y = r^k k / \mu_z$ より、

$$\beta = \frac{\mu_z}{\alpha \frac{y}{k/\mu_z} + (1 - \delta)}$$

から β が得られる。次に x であるが、これはデータから得られるマネタリーベースの伸び率に等しい。続いて家計の効用における流動性選好の比重 θ を推計する。付録 (72) より、

$$\theta = \frac{R^D m m^b / y}{c / y}$$

(69) より、 $R^D = (1 + x) / \beta - 1$ 。ただしここで (75) より $\mu_z \pi = 1 + x$ を用いた。これにより θ が得られる。次に法定準備率 τ を推定する。(67) より、

$$\tau = \frac{\frac{(1+x)m^b}{y} - \frac{mm^b}{y} - \frac{e^x}{y}}{\frac{(1+x)m^b}{y} - \frac{mm^b}{y} + 1}$$

より τ が得られる。次に企業のマークアップ率 λ^f であるが、Nishimura, Ohkusa and Ariga [1999] によると日本の製造業と非製造業を合わせた 21 産業の算術平均マークアップ率は 1.17 となっている。これに基づき、本論

文では $\lambda^f = 1.17$ と与える。次に銀行の技術に関するパラメータ a_b を推定する。モデルにおける預金の定義より $d_t/z_t = (1+x_t)m_t^b - m_t m_t^b + y_t$ 、銀行の生産関数より $d_t/z_t = a_b \left[(1-\nu) \left(\frac{k_t}{l_t} \right)^\alpha l_t \right]^{\xi^b} \left(\frac{e_t^z}{y_t} \right)^{1-\xi^b}$ が得られることから、

$$a_b = \frac{(1+x) \frac{m^b}{y} - \frac{mm^b}{y} + 1}{\left[(1-\nu) \left(\frac{k/\mu_z}{l} \right)^{\alpha-1} \left(\frac{k/\mu_z}{y} \right) \right]^{\xi^b} \left(\frac{e^z}{y} \right)^{1-\xi^b}}$$

を得る。企業が価格を変更する確率 ξ^p についてはモデルから具体的には求められない。そこで本論文では Altig, Christiano, Eichenbaum and Linde [2003] に従い、この値を 0.5 と与える^{*13}。

残るパラメータは ψ_L, a_b, ξ^b, ϕ である。このうち初めの 3 つについては上と同様の方法で求めるのは困難である。そこで, Cristiano, Motto and Rostagno [2004] で用いられている手法を参考にこれらのパラメータをモデルの内生変数と共に求める。

まず本来外生変数であるこれら 3 つのパラメータを内生変数と見て、その代わりに ν, m, l の 3 つの内生変数を外生変数とみなしデータの平均値として設定する。これにより、内生変数は

$$\pi, R^D, d_e, R, k, i, w, r^k, c, m^b, e_z^*, e^v, d_K, y, \psi_L, a_b, \xi^b$$

の 17 個となり、以下のアルゴリズムを用いて数値計算によってこれらの内生変数を求めることが出来る。アルゴリズムは以下の通り。

- Step1: (75) 式より π , (71) 式より r^k , (69) 式より R^D をそれぞれ求める。
- Step2: R の推測値を設定する。
- Step3: (68) 式より d_e , (61) 式より w , (58) 式より k , (73) 式より i , (77) 式より y , (76) 式より c , (70) 式より ψ_L , (72) 式より m_b , (67) 式より e_z^* , (65) 式より e^v , (66) 式より ξ^b , (64) 式より a_b , (63) 式より d_K を順に求める。
- Step4: (62) 式から R を求め、推測した値と異なるのであれば推測値を変えて Step 2 に戻る。

このアルゴリズムを、 R の推測値と計算結果が等しくなるまで続けることにより、内生変数全ての値を求めることが出来る。

最後に企業の固定費用のパラメータ ϕ を推計する。非確率的な定常状態では企業の利潤はゼロになると仮定しているので、

$$y - s(y + \phi) = 0$$

が成り立ち、さらに企業の生産関数から

$$y = \nu \left(\frac{k/\mu_z}{l} \right)^\alpha (l)^{1-\alpha} - \phi$$

が得られるので、この 2 式より、

$$\phi = \left(1 - \frac{1}{\lambda^f} \right) \nu \left(\frac{k/\mu_z}{l} \right)^\alpha l$$

を得る。

以上で全ての非確率的なパラメータと内生変数の定常状態での値が得られた。非確率的なパラメータの推定結果を表 1 に表す。

^{*13} しかしながらこの値はアメリカのデータに基づいて推計されたものであり、直ちに日本に適用できるかどうか疑問が残る。日本における価格の硬直性に関する実証研究については今後の課題とする。

表 1: 非確率的なパラメータ (時間単位: 四半期)		
Panel A: Household Sector		
β	割引因子	0.99704
ψ_L	労働の不効用の比重	3.2337
θ	流動性選好の比重	0.0091179
Panel B: Goods-Producing Sector		
μ_z	労働生産性上昇率	1.0048
λ^f	非確率的な定常状態における中間財企業のマークアップ率	1.17
ξ_p	価格を再設定できない中間財企業割合	0.50
δ	資本の減耗率	0.11328
α	資本分配率	0.36825
ϕ	中間財企業の固定費用	0.15708
Panel C: Banking Sector		
ξ^b	銀行の預金生産技術における, 生産要素の指数	0.98651
a_b	銀行の技術	32.852
Panel D: Policy		
τ	法定準備率	0.0404
x	非確率的な定常状態におけるマネタリーベースの伸び率	0.016386

3.2 モデルの解

確率過程を支配するパラメータを推定するためには, 前章で設定したモデルの解を定式化することが必要である。モデルの解を求めるに際して, 本論文では標準的な手法に従い, 非確率的な定常状態の近傍での対数線形近似を用いる。本章では初めに解の概説を行い, その後に非確率的な定常状態の近傍での対数線形近似表現を求める。

本モデルでは景気循環を, 非確率的な定常状態からの内生変数の百分率乖離 (“^”をつけて表す.) の変動と定義する。モデルの解には以下の 15×1 の内生変数ベクトルが含まれる。

$$\tilde{z}_t = (\hat{\pi}_t, \hat{s}_t, \hat{r}_t^k, \hat{i}_t, \hat{v}_t, \hat{e}_t^v, \hat{m}_t^b, \hat{R}_t, \hat{m}_t, \hat{R}_t^D, \hat{c}_t, \hat{w}_t, \hat{l}_t, \hat{k}_{t+1}, \hat{x}_t)'.$$

モデルの解を求めるためには, 上述の 15 種類の内生変数とモデルの非確率的なパラメータ及び内生変数の非確率的な定常状態の値によって記述される 15 個の差分方程式が必要となる。この差分方程式は, 2 章で設定したモデルの関係式を対数線形近似することにより得られる。これを

$$E_t[\alpha_0 \tilde{z}_{t+1} + \alpha_1 \tilde{z}_t + \alpha_2 \tilde{z}_{t-1} + \beta_0 \Psi_{t+1} + \beta_1 \Psi_t] = 0 \quad (52)$$

と表す。ただし, 15×15 行列 α_i と 15×12 行列 β_i は, ともにモデルの非確率的なパラメータと内生変数の非確率的な定常状態での値の関数からなる行列である。この連立方程式体系を構成する 15 本の線形差分方程式は付録 C において詳述する, (46), (80), (81), (82), (83), (86), (87), (89), (90), (91), (92), (93), (94), (95), (98) である。

この差分方程式 (52) と 確率過程を表す式 (44) は, Cristiano [2002] の手法によって

$$\tilde{z}_t = A\tilde{z}_{t-1} + B\Psi_t \quad (53)$$

と一階の差分方程式に書き直すことができる^{*14}. 行列 A は非確率的なパラメータと非確率的な定常状態での内生変数の値から, また B はこれに加え確率過程に関するパラメータからなる行列である.

3.3 確率過程を支配するパラメータ

確率過程を支配するパラメータは, カルマン・フィルターによる最尤法を用いて推定する.^{*15 *16}

以下推定方法を簡潔に記述し, 推定結果を示す. 推定に用いる変数を

$$X_t = (\log \pi_t, \log l_t, \Delta \log Y_t, \log(W_t/(P_t Y_t)), \\ \log(I_t/Y_t), \log V_t^2, \log(C_t/Y_t), \log d_t^c, \log V_t^b, \log d_t^r, R_t^b)'$$

とする. ただし, V_t^2, V_t^b はそれぞれ M2+CD とマネタリーベースの流通速度, d_t^c, d_t^r はそれぞれ現金-預金比率, 準備-預金比率を表す.

3.2 節までの議論により, モデルは (44) と (53) の 2 つの式にまとめられた. この 2 式は

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_{t+1} \\ \tilde{z}_t \\ \Psi_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B\rho \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{z}_t \\ \tilde{z}_{t-1} \\ \Psi_t \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} BD \\ 0 \\ D \end{bmatrix} \varphi_{t+1} \quad (54)$$

と書くことができる. この式を簡潔に

$$\xi_{t+1} = F\xi_t + \Gamma\varphi_{t+1} \quad (55)$$

と書く. さらに, X_t を定常状態の近傍で線形近似することによって, $X_t = H\xi_t$ と書くことができる. H は非確率的なパラメータと定常状態での内生変数の値からなる行列である. ただしここで興味があるのは定常状態からの乖離のみであるため, X_t の平均をゼロにしてある. X_t に対応するデータを y_t とすると, モデルの誤差を w_t とし,

$$y_t = H\xi_t + w_t \quad (56)$$

と表せる. (55), (56) の 2 式がそれぞれカルマン・フィルターの「State equation」, 「Observation equation」に相当し, 本モデルはこの 2 式の係数行列 F, H と, $\Gamma\varphi_t$ の分散-共分散行列 Q , 誤差 w_t の分散-共分散行列 R によって表現される. Q, R は対角行列, v_t, w_t は各期において独立で同じ分布で, かつ $\xi_t, y_t, \tau \geq 0$ と直交していると仮定する. 今推定すべきパラメータはショックの自己回帰係数と標準偏差, 貨幣的反応の自己回帰係数と分散項係数, R の対角成分の合計 27 個である. この未知パラメータをまとめてベクトル Υ で表す. 以上より, $F(\Upsilon), \Gamma(\Upsilon), Q(\Upsilon), R(\Upsilon)$ が Υ の関数で表される. v_t, w_t が正規分布に従うと仮定すると, カルマン・フィルターから得られる対数尤度関数が Υ の関数で与えられるので, この対数尤度関数を最大にするように Υ を決定することでパラメータを推定することが出来る. 推定のためのアルゴリズムは以下の通りである.

^{*14} 行列 A, B の具体的な求め方は付録 D に示した.

^{*15} カルマン・フィルターの詳細は Hamilton [1994] を参照. 本節の分析には数値計算が必要になる. ソフトは Matlab を使用し, カルマン・フィルターを用いる際に Murphy [1998] を, また最尤法に必要な最大化には Miranda and Fackler [2002] を参考にプログラミングを行った.

^{*16} カルマン・フィルターを用いたパラメータ推定に関する先行研究には Burmeister and Wall [1982] がある. 彼らはこの手法を用いてドイツのハイパーインフレーションを分析している.

第2表: 確率的な外生ショックと貨幣的反應のパラメータ					
		ショック: $\hat{\lambda}_t = \rho \hat{\lambda}_{t-1} + \varphi_t, E(\varphi_t)^2 = \sigma^2$			
		貨幣的反應: $x_t = \theta^2 x_{t-1} + \theta^0 \varphi_t$			
ショック		ρ	σ	θ^2	θ^0
λ_t^f	中間財企業の市場支配力	0.94356	0.032078	0.49982	12.8
ϵ_t	中間財企業の技術	0.94028	0.030045	0.87219	101.8
ζ_t	労働供給	0.93698	0.014593	0.79533	-9.9994
u_t	流動性選好	0.88425	0.12342	0.26355	-0.07802

第3表: 推定に用いた内生変数の標準偏差			
変数	標準偏差	変数	標準偏差
$\log \pi_t$	3.6671×10^{-2}	$\log(\frac{C_t}{Y_t})$	2.9622×10^{-2}
$\log l_t$	3.0168×10^{-6}	$\log(d_t^c)$	0.14373
$\Delta \log Y_t$	1.9595×10^{-3}	$\log(V_t^b)$	0.18561
$\log(\frac{W_t}{P_t Y_t})$	9.1498×10^{-2}	$\log(d_t^r)$	6.2233×10^{-3}
$\log(\frac{l_t}{Y_t})$	6.9327×10^{-2}	R_t^b	5.9815×10^{-5}
$\log(V_t^2)$	2.6583×10^{-2}		

- Step1: Υ の初期推測値 Υ^0 を決定する.
- Step2: $F(\Upsilon^i), \Gamma(\Upsilon^i), Q(\Upsilon^i), R(\Upsilon^i)$ を求める.
- Step3: カルマン・フィルターによって対数尤度 $L(\Upsilon^i)$ を求める.
- Step4: Davidson-Fletcher-Powell の方法により新たな推定値 Υ^{i+1} を求める.*17
- Step3: $\|\Upsilon^{i+1} - \Upsilon^i\|$ が十分小さくなるか, ヤコビアン $\|\frac{\partial L(\Upsilon^{i+1})}{\partial \Upsilon}\|$ が十分小さくなれば推定を終え, Υ^{i+1} を最尤推定値とみなす. 基準を満たさない場合は $\Upsilon^i = \Upsilon^{i+1}$ として Step2 に戻る.

推定の結果を第2表, 第3表に示す.

4 パラメータの検証

本章では, 前章において推定したパラメータを用いて, モデルから得られる経済変数と実際のデータを比較することによりモデルの説明力を検討する.

4.1 定常状態

モデルの定常状態とデータの平均値を主要な経済変数について比較したものを第4表に示す.

第4表から, 実物変数に関しては定常状態の値はデータとよく一致している. 一方, 金融変数, 特にインフレ率とインターバンク金利は乖離幅が大きい. 特にインフレ率については後に見るように景気循環についての分

*17 Davidson-Fletcher-Powell の方法については Hamilton [1994] を参照.

第4表: 定常状態でのモデルとデータの比較		
変数	モデル	データ (1980.1-2004.1)
K/Y	19.2629	19.28074
I/Y	0.3105	0.309689
C/Y	0.6895	0.690311
W/PY	2.8609	1.670582
インフレ率	1.15%	0.18%
流通速度 (マネタリーベース)	2.7153	2.538819
流通速度 (M2+CD)	0.7281	0.966289
現金-預金比率	0.3088	0.088191
現金-マネタリーベース比率	0.8799	0.88910
インターバンク金利 (有担保翌日物)	4.82%	0.8863%

析でもモデルの説明力は低く、推定方法に何らかの改良が必要であると推測できる。定常状態については (75) 式より $\mu_2\pi = 1+x$ が満たされるが、量的緩和政策によって x の値が大きくなっているためインフレ率の推定値 π は大きくなっている。一方現実のデータではインターバンク金利がゼロ以下に下がることが出来ないため金利を通じたインフレ率上昇のメカニズムは働かず、現実のインフレ率は上昇していない。このことは 90 年代以降の日本経済の分析には名目金利の非負制約を導入したモデルが必要であることを示唆している。

4.2 ショックの確率過程

ここでは外生的ショックに関するパラメータとそれに対応する貨幣的反応の推定結果を検証する。

まずショックの自己回帰係数が 1 に近いことが第 2 表から分かる。これはモデルがデータ内の変数の持続性 (persistence) を捕らえていることを表す。流動性選好ショック u_t の自己回帰係数 ρ_u が他のショックに比較して小さいことは、流動性選好ショックが比較的短期の経済変動に影響を与えることを示唆している。次にイノベーションがショックに与える影響を見る。第 5 表はイノベーションの正の標準偏差変化がショックとそれに対する金融政策の反応に与える影響を示している。例えば λ_t^f に関しては定常状態の値は 1.17 であり、正の標準偏差イノベーションが起こった場合、値は 1.21 に上昇することを表している。Christiano, Motto and Rostagno [2004] において、1930 年代のアメリカ大不況の分析に同様の手法が取られているが、それと比較するとイノベーションの標準偏差変化に対するショックの反応は若干大きくなっている。これはショックの種類が彼らのモデルより少ないため、各ショックの比重が大きくなっていることが原因であると考えられる。最後に金融政策の反応を考察する。第 5 表は例えば λ_t^f に正の標準偏差イノベーションが生じた場合、イノベーションがなかった場合と比較して当該期にマネタリーベースは 0.67% 増加し、さらに 1.35% 増加するまでマネタリーベースは増加し続けることを表している。金融政策の反応は、技術ショック ϵ_t 以外は Christiano, Motto and Rostagno [2004] とほぼ変わらない。技術ショックについては金融政策の反応が大きくなっている。

技術ショックについてはさらに詳しく見ることにする。GNP を Y_t 、これを z_t で除したものを Y_t^z とすると、(5) 式より

$$Y_t^z = \epsilon_t F - \phi$$

第5表: イノベーションがショックと貨幣的反応に与える影響				
	定常状態	定常状態 + イノベーション ⁽¹⁾	貨幣の 即時的反応 ⁽²⁾	貨幣の 長期的反応 ⁽³⁾
λ_t^f	1.17	1.21	0.67%	1.35%
ϵ_t	1	1.03	5.01%	39.2%
ζ_t	1	1.01	-0.24%	-1.17%
v_t	1	1.12	-0.02%	-0.0214%
注:(1) 定常状態の値 + $\sigma \times$ 定常状態の値 (2) $100 \times x \times \theta^0 \times \sigma$, (3) $100 \times x \times \theta^0 \times \sigma / (1 - \theta^2)$				

と表せる。この式を ϵ_t と Y_t^z について全微分すると

$$Y^z \hat{Y}_t^z = \hat{\epsilon}_t F$$

となる。さらに定常状態では中間財企業の利潤はゼロになるので $Y^z = F - \phi = F/\lambda^f$, よって $F = \lambda^f Y^z$ 。したがって

$$\hat{Y}_t^z = \lambda^f \hat{\epsilon}_t$$

が得られる。 $\lambda^f = 1.17$ であるから、定常状態からの 1% の技術ショックは GNP を 1.17% 増加させる。技術ショックの標準偏差は第2表より 3% であるので、標準偏差技術ショックは GNP を $1.17 \times 3 = 3.51\%$ 増加させる。

5 貨幣的景気循環モデルの評価

前節までの分析によってモデルの外生的パラメータについては完全に推定が終了した。本節ではモデルが示す内生変数の推定値とデータをフィッティングさせて誤差を測定することによって景気循環に関する本モデルの評価を行う。

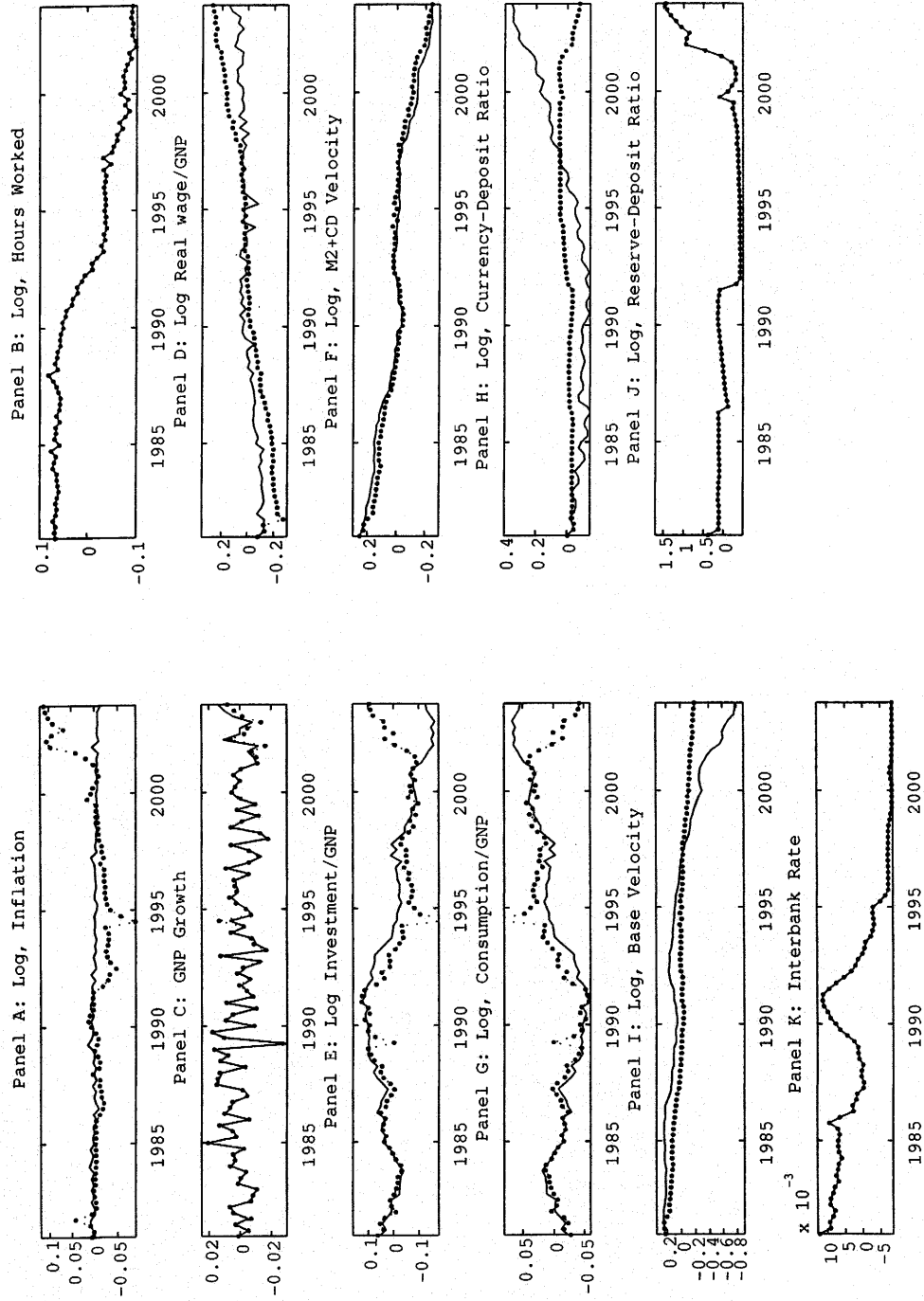
カルマン・フィルターによって、 ξ_t の条件付線形最小 2 乗推定値 $\hat{E}_t(\xi_t)$ が得られるので、内生変数の推定値 $\hat{E}_t(X_t) = H \times \hat{E}_t(\xi_t)$ を計算することができる。図2は内生変数 X_t について、モデルによる推定値と現実のデータの比較を行っている。ただしグラフを書く上で景気循環に興味を絞るため、モデルの推定値とデータの標本平均を一致させている。

グラフにおいて、各内生変数のモデルとデータとの差を「測定誤差」と呼ぶ。このモデルでの測定誤差は(56)式の w_t に相当する。

以上の推定から読み取れるモデルの説明力の評価を以下に記す。

まず注目すべき点は、モデルの説明力は変数によって大きく異なることである。第2図の Panel B,C,F,J,K, すなわち労働時間, GDP 成長率, M2 + CD の流通速度, 準備-預金比率, 短期金利に関してはモデルからの推定値とデータは非常によく一致している。第2図の Panel E,G,I, すなわち投資-産出比率, 消費-産出比率, マネタリーベースの流通速度は上の変数より当てはまりが悪い。残りの変数はデータをよく説明しているとはいえない。誤差の標本標準偏差とデータの標本標準偏差の比を第6表に示した。これによると労働時間, 準備-預金比率, 短期金利の誤差が特に小さい。一方、インフレ率の誤差は非常に大きくなっている。インフレ率の誤差が大きくなっている原因はいくつか考えられる。一つは価格の硬直性の度合いを示す外生パラメータ ξ^p が正しく

Figure 2 Actual and Fitted Data, ratios. (Solid line: Actual, Dotted line: Fitted.)



第 6 表: 測定誤差とデータの標本標準偏差の比			
変数	σ_w/σ_X	変数	σ_w/σ_X
$\log \pi_t$	6.8462	$\log(\frac{C_t}{Y_t})$	0.88393
$\log l_t$	4.8747×10^{-5}	$\log(d_t^c)$	1.0039
$\Delta \log Y_t$	0.21518	$\log(V_t^b)$	0.69302
$\log(\frac{W_t}{PY_t})$	1.3545	$\log(d_t^r)$	1.4311×10^{-2}
$\log(\frac{I_t}{Y_t})$	0.91066	R_t^b	8.6051×10^{-3}
$\log(V_t^2)$	0.2091		

推定されていない可能性である。3.1 節で示したとおり、 ξ^p はアメリカの実証研究による値を採用しており、この値が日本にも適用できるか否かは不明である。本節の推定がインフレ率の変化を過大に見積もっているという事実が ξ^p の不完全さによるものであるとするならば、これは日本の物価水準の変化はアメリカのそれよりも粘着的であることを示唆している。原因の 2 つ目はインフレ率と準備-預金比率との関係である。第 2 図の Panel A と Panel J を比較すると、モデルにおいては全期間を通じて準備-預金比率とインフレ率の変化は非常に似通っている。準備-預金比率の推定値はデータとよく一致しているため、モデルの問題点は準備-預金比率の変化にインフレ率が過剰に反応する点にあると推察できる。

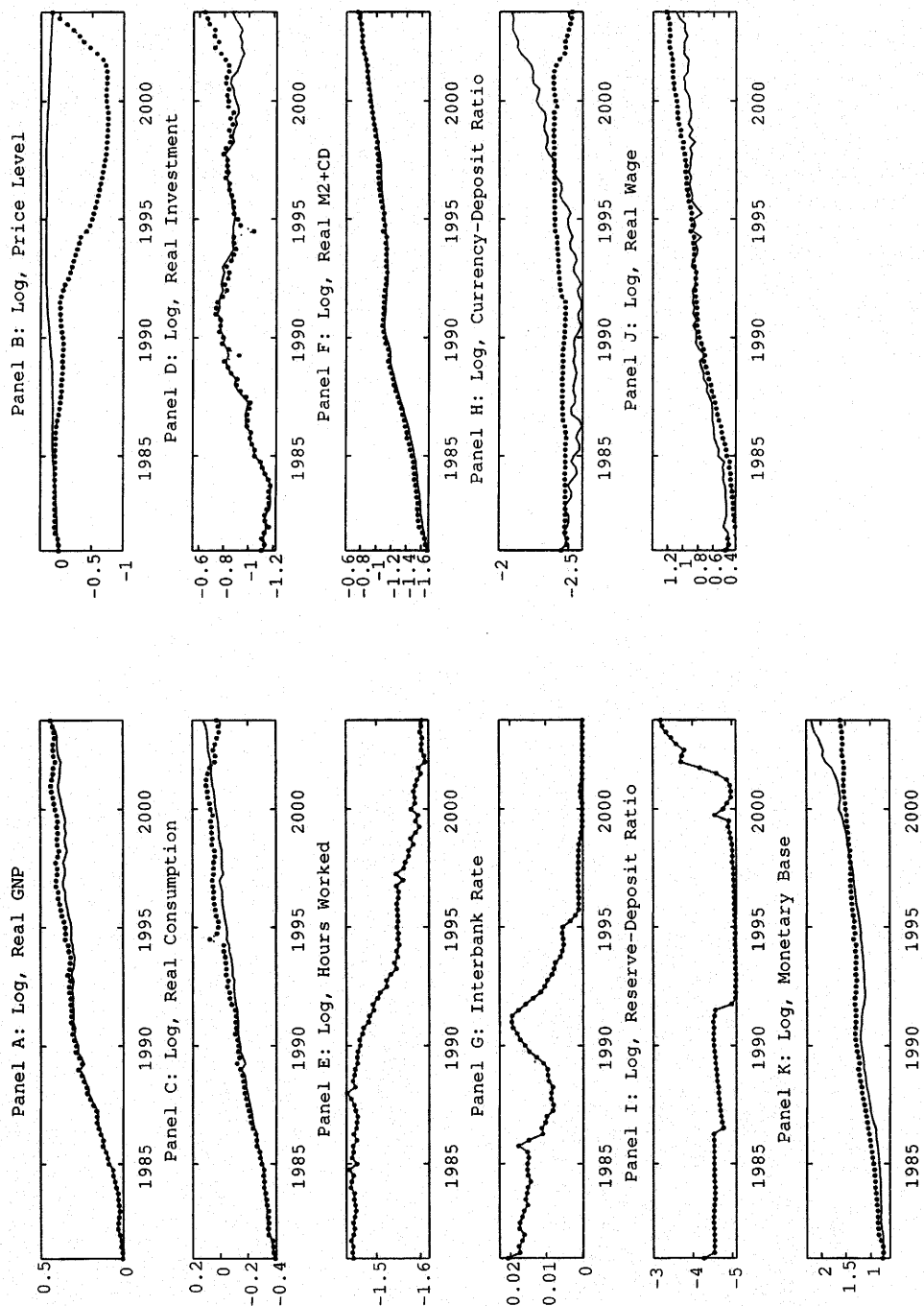
次に、2001 年以降、測定誤差が大幅に上昇することに着目する。インフレ率は 2001 年以降データには大きな変化がないにも関わらず、モデルの推定値が大幅に上昇している。消費-産出比率、投資-産出比率、現金-預金比率はモデルの推定値がデータとは逆の方向に変化している。また、マネタリーベースの流通速度はデータにおいて低下しているにも関わらずモデルではその低下を説明できていない。

さらに詳しく考察するため、図 2 の結果を各変数の水準に直す。各変数の水準でのモデルとデータの比較を図 3 に示す。図 3 から、全体としてはモデルとデータはよく一致していると見る事が出来るが、モデルにはいくつかの問題点が存在する。

一つは物価水準においてモデルとデータの乖離が非常に大きいことである。物価水準における乖離は 90 年代に入って大きくなり、特に 90 年代後半から変化の方向が逆になっている。モデルの推定値は 92 年から下落幅が大きくなり、2001 年以降モデルの推定値は急激に上昇する。上述のとおり、本モデルの問題点は準備-預金比率とインフレ率の過剰な相関である。2001 年以降物価水準の推定値が急激に上昇しているのは量的緩和政策に伴う準備-預金比率の上昇を反映している。一方、実際のデータを観察すると 2001 年以降は準備-預金比率は上昇しているものの、インフレ率は緩やかな下落を続けており、モデルで見られるような正の相関は観察されない。この結果から、量的緩和政策を分析するにはモデル内の準備-預金比率とインフレ率の相関の高さを見直す必要があることがわかる。さらに注目すべき点は、2001 年以降のインフレ率の変化の大きさと対照的に、インターバンク金利はゼロ近辺でほぼ一定となっていることである。これは本モデルでは量的緩和政策とインフレ率の変化が、インターバンク金利を介さずに直接結ばれていることを示唆している。

2 点目は、消費と投資においては水準データに直した後であっても引き続き 2001 年以降モデルとデータの変化方向が逆転していることである。モデル内で消費が減少し投資が上昇している原因として考えられるのは物価水準の上昇とそれに伴う実質金利の低下である。インターバンク金利の推定値は現実のデータとよく一致しており、ゼロに近い水準で安定している。名目金利が変化しないとき、物価水準の上昇は実質金利の低下を招く。これにより企業の資本需要は増加する。家計が消費から投資財の購入にシフトするため投資需要は増加し消費

Figure 3 Actual and Fitted Data, Converted to Levels. (Solid line: Actual, Dotted line: Fitted.)



需要は低下する。^{*18} しかしデータにおいては物価水準の上昇は起こっておらず、従ってこのようなメカニズムは成立しない。

この2つの問題点に関する考察から、本論文で採用した標準的な貨幣的景気循環モデルの大きな問題点としては物価水準の説明力が不足していることであり、物価水準が準備-預金比率の変化に過敏に反応している点を改善することにより説明力は大きく向上すると考えられる。特にゼロ金利近辺におけるマネタリーベース増加に対する反応の大きさは問題点のひとつであり、これは2000年代の日本経済を説明するモデルの構築に際してゼロ金利制約の重要性を示唆している。^{*19}

次に、現金-預金比率の変動、特に95年以降の上昇をモデルは説明できていない。これは家計の選好に現金-預金選択を含めていないことが原因であると考えられる。Christiano, Motto and Rostagno [2004]においては家計の効用関数に現金-預金選択をコブ-ダグラス型を用いて明示的に導入しており、彼らのモデルによる現金-預金比率の推定値は本モデルより優れている。現金-預金選択を明示的に導入したモデルを用いた際の実験結果がどのように変化するかは今後の研究課題とする。

最後に実質賃金の変動について考察する。実質賃金はモデルの推定値の方が変動が大きい。このことはモデルに賃金の硬直性を導入することによりモデルの説明力が向上することを示唆している。Erceg, Henderson and Levin [2000]はCalvo [1983]型の賃金の硬直性を導入したモデルによって最適金融政策を導いている。この設定は価格の硬直性と本質的に同じメカニズムによって導入することが可能であり、今後の日本経済の分析にも有用と思われる。

6 結論と今後の検討課題

本論文では日本経済のマクロ経済データを用いて標準的な貨幣的景気循環モデルのパラメータを推定し、モデルの説明力の評価を行った。分析から得られた結論は以下の通りである。

1. モデルの定常状態における内生変数の値とデータの比較は概ね良い一致が見られたが、インフレ率と短期金利については大きな乖離があり、名目金利の非負制約の必要性が示唆されている。より計量経済学的なパラメータの推定手法を用いて再検討してみる必要があると考えられる。
2. モデルから得られる内生変数の動学と現実のデータを比較することによって、本論文において設定した貨幣的景気循環モデルの説明力を分析した。結果として、モデルの説明力は変数ごとに異なり、特に2001年以降の推定において誤差が大きい。このことから、量的緩和政策局面における分析にはインフレ率の動学をはじめとしたモデルの改良が必要であることが明らかになった。

最も重要と考えられる結論は、量的緩和局面においては本論文で用いた標準的な貨幣的景気循環モデルでは分析が不可能であるという事実である。本論文において採用したモデルから得られる結果は、量的緩和政策はインターバンク金利を変化させることなく準備-預金比率の上昇とインフレ率を上昇をもたらすという結果である。しかし現実のデータではインフレ率の上昇は生じていない。この事実は量的緩和政策の無効性及びインフレ率と名目金利の因果関係の重要性、名目金利の非負制約の必要性を示唆しているように見える。

^{*18} 現実の経済においては投資選択は家計ではなく企業もしくは投資家が行うと考えられる。しかしモデルに投資家を導入したとしても、追加的な仮定（例えば Financial Accelerator 仮説 (Bernanke, Gertler and Gilchrist [1999] 等を参照。)) を導入しない限り結果は同じである。

^{*19} ゼロ金利制約を導入したモデルの研究として Krugman [1998], Eggertsson and Woodford [1999], Nakajima [2005] 等があり、特に最適金融政策に関する理論的研究は活発に行われている。今後はこれらを踏まえた実証的な研究が多く行われると考えられる。ゼロ金利制約を導入したモデルによる実証研究は本論文においても今後の課題と位置づけられる。

本研究の今後の課題を2点挙げる。一つは外生的ショックの大きさとそれに対する内生変数の反応を分析することにより、90年代以降の日本の不況の原因を探ることである。モデルのパラメータが高い精度で推定できれば、Christiano, Motto and Rostagno [2004]と同様の手法を用いることによって平成不況の原因がいかなる種類のものであったかを数量的に分析することが可能になる。もう一つはマネタリーベースと名目金利の関係、賃金の硬直性、名目金利の非負制約等の追加的な仮定をモデルに導入して拡張することでモデルの説明力を高めることである。特に2001年以降の量的緩和局面を高い精度で説明できるモデルが開発されれば、より現実に即した政策提言が可能になると期待できる。

付録 A データ

変数の定義, データの出所を第 7 表に示した.

第 7 表: データの定義, 出所		
変数	定義	出所
名目産出	名目 GNI	内閣府 「国民経済計算」
実質産出	実質 GNI	「国民経済計算」
物価水準	名目産出/実質産出	
投資	総固定資本形成 + 在庫品増加 + 純輸出 + 海外からの所得	「国民経済計算」
消費*20.	民間最終消費支出 + 政府最終消費支出	「国民経済計算」
労働力人口	全産業	総務省 「労働力調査月報」
マネタリーベース	平均残高	日本銀行 「金融調査統計」
現金貨幣	銀行券発行残高 + 貨幣流通高	「金融調査統計」
M2+CD	平均残高	「金融調査統計」
銀行準備	準備預金額 (平均残高)	「金融調査統計」
インターバンク 金利	有担保翌日物	「金融調査統計」
資本	(注)	「国民経済計算」
労働時間	総実労働時間 (30 人以上)	厚生労働省 「毎月勤労統計調査」
就業者人口	男女計 (就業者総数, 金融・保険業)	「労働力調査月報」
超過準備	準備預金額 - 法定準備額	「金融調査統計」
(注) 資本は 2003 年の正味資産 (国富) から 「貯蓄・資本移転による正味資産の変動」を順に差し引くことで求めた. 詳しくは外木 [2002] 参照.		

付録 B 非確率的な定常状態の記述

以下に非確率的な定常状態での方程式体系を記述する.

B.1 企業

(3) より,

$$P_t = [(1 - \xi_p)(\tilde{P}_t)^{\frac{1}{1-\lambda_f}} + \xi_p(\pi_{t-1}P_{t-1})^{\frac{1}{1-\lambda_f}}]^{1-\lambda_f}.$$

辺々 P_t で割ると

$$1 = (1 - \xi_p)(\tilde{p}_t)^{\frac{1}{1-\lambda_f}} + \xi_p\left(\frac{\pi_{t-1}}{\pi_t}\right)^{\frac{1}{1-\lambda_f}}.$$

よって非確率的な定常状態では

$$\tilde{p} = 1. \quad (57)$$

(9) を辺々 z_t で割ると,

$$\frac{\frac{1}{\mu_z} k_t}{l_t} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_t}{r_t^k}.$$

よって非確率的な定常状態では

$$\frac{r^k}{w} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{\mu_z l}{k}. \quad (58)$$

(10) より, 非確率的な定常状態では

$$s = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha (1+R)(w)^{1-\alpha}(r^k)^\alpha. \quad (59)$$

(16) を変形すると

$$E_t \sum_{l=0}^{\infty} (\xi_p)^l Q_{t,t+l} X_{t,l} \left[\tilde{p}_t - \lambda_{t+l}^f s_{t+l} \frac{\pi_{t+l}}{\pi_t} \right] \left(\frac{1}{X_{t,l}} \frac{\pi_t}{\pi_{t+l}} \tilde{p}_t \right)^{-\frac{\lambda_{t+l}^f}{\lambda_{t+l}^f - 1}} (\mu_z)^l y_{t+l} = 0.$$

ただし, $y_t = Y_t/z_t$. 従って非確率的な定常状態では

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_z \pi \xi_p}{1+R^D} \right)^l [\tilde{p} - \lambda^f s] \left(\frac{1}{\pi^l \tilde{p}} \right)^{-\frac{\lambda^f}{\lambda^f - 1}} y = 0.$$

すなわち,

$$\tilde{p} = \lambda^f s = 1. \quad (60)$$

(59), (60) より,

$$\frac{1}{\lambda^f} = \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha (1+R)(w)^{1-\alpha}(r^k)^\alpha. \quad (61)$$

B.2 金融仲介機関

(30) より, 非確率的な定常状態では

$$(1+R)r^k = \frac{d_K}{1+\tau d_e} R. \quad (62)$$

ただし, d_K, d_e は以下の通り.

$$d_K = a_b \alpha \xi^{b^b} (e^\nu)^{1-\xi^b} \left(\frac{\mu_z l}{k} \right)^{1-\alpha} \quad (63)$$

$$d_e = (1 - \xi^{b^b}) a_b (e^\nu)^{-\xi^{b^b}} \quad (64)$$

e^ν は (51) で定義した e_t^ν の定常状態での値である. つまり,

$$e^\nu = \frac{(1 - \tau) m^b (1 + x - m) - \tau (wl + r^k k / \mu_z)}{(1 - \nu) (k / \mu_z)^\alpha (l)^{1-\alpha}}. \quad (65)$$

銀行の生産関数を z_t で除し, (64) を代入すると,

$$\frac{d_e}{1 - \xi^{b^b}} e_z' = m^b (1 + x - m) + wl + r^k \frac{k}{\mu_z}. \quad (66)$$

ここで e_z' は労働者一人当たり名目超過準備を $P_t z_t$ で除したものの非確率的な定常状態での値であり,

$$e_z' = (1 - \tau) (1 + x - m) - \tau (wl + r^k \frac{k}{\mu_z}) \quad (67)$$

(32) より,

$$R^D = \frac{(1 - \tau) d_e - 1}{1 + \tau d_e} R \quad (68)$$

B.3 家計

(38) を (39), (40), (41), (42) に代入して ψ_t を消去すると, 非確率的な定常状態では

$$1 = \frac{\beta}{\mu_z} \frac{1 + R^D}{\pi} \quad (69)$$

$$\frac{\psi_L}{1 - l} = \frac{w}{c} \quad (70)$$

$$1 = \frac{\beta}{\mu_z} (r^k + 1 - \delta) \quad (71)$$

$$\frac{\theta}{m} = \frac{R^D m^b}{c}. \quad (72)$$

さらに, 資本動学式 (37) より

$$i = (1 - \frac{1 - \delta}{\mu_z}) k. \quad (73)$$

予算制約式 (36) より,

$$\mu_z m^b = (1 + R^D) (\mu_z \pi m^b - m^b m) + m^b m + wl + \frac{r^k}{\mu_z} k - c - i \quad (74)$$

B.4 中央銀行

(45) より,

$$\mu_z \pi = 1 + x \quad (75)$$

B.5 最終財市場均衡

生産された最終財は消費か投資に用いられるので,

$$y = c + i. \quad (76)$$

定常状態では中間財企業の利潤はゼロになる. よって

$$y - \frac{1}{\lambda'}(y + \phi) = 0$$

生産関数を z_t で除すと, 非確率的な定常状態では

$$y = v \left(\frac{k}{\mu_z} \right)^\alpha (l)^{1-\alpha} - \phi$$

この2式より,

$$y = \frac{1}{\lambda'} v \left(\frac{k}{\mu_z} \right)^\alpha (l)^{1-\alpha}. \quad (77)$$

付録 C 対数線形近似

以下「対数線形近似」と表現した場合は, 非確率的な定常状態の近傍での対数線形近似である.

C.1 企業

(16) を対数線形近似すると,

$$\hat{p}_t = (\hat{\lambda}_t^f + \hat{s}_t) + E_t \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_z \pi}{1 + R^D} \xi_p \right)^l \left[(\hat{\lambda}_{t+l}^f - \hat{\lambda}_{t+l-1}^f) + (\hat{s}_{t+l} - \hat{s}_{t+l-1}) + (\hat{\pi}_{t+l} - \hat{\pi}_{t+l-1}) \right] \quad (78)$$

ここで, $\tilde{p}_t = \frac{\hat{p}_t}{P_t}$.

一方 (3) より,

$$P_t = [(1 - \xi_p)(\tilde{P}_t)^{\frac{1}{1-\lambda_t^f}} + \xi_p(\pi_{t-1}P_{t-1})^{\frac{1}{1-\lambda_t^f}}]^{1-\lambda_t^f}$$

と表すことができ, これを対数線形近似することによって,

$$\hat{p}_t = \frac{\xi_p}{1 - \xi_p} (\hat{\pi}_t - \hat{\pi}_{t-1}) \quad (79)$$

と表すことができる.

(78), (79) から \tilde{p} を消去し, (71) を用いると, インフレ率の動学は

$$E_t \left[\hat{\pi}_t - \frac{1}{1+\beta} \hat{\pi}_{t-1} - \frac{\beta}{1+\beta} \hat{\pi}_{t+1} - \frac{(1-\xi_p)(1-\beta\xi_p)}{\xi_p(1+\beta)} (\hat{\lambda}_t^f + \hat{s}_t) \right] = 0 \quad (80)$$

(10) を対数線形近似することにより,

$$(1-\alpha)\hat{w}_t + \alpha\hat{r}_t^k + \frac{R}{1+R}\hat{R}_t - \hat{e}_t - \hat{s}_t = 0 \quad (81)$$

を得る.

(9), (10) より

$$s_t = \frac{(1 + R_t)r_t^k}{\alpha \varepsilon_t \left(\frac{\mu_z l_t}{k_t} \right)^{1-\alpha}}$$

が成立する. この式を対数線形近似すると,

$$\hat{r}_t^k + \frac{R}{1+R} \hat{R}_t - \hat{\varepsilon}_t - (1-\alpha) \hat{l}_t + (1-\alpha) \hat{k}_t - \hat{s}_t = 0. \quad (82)$$

C.2 金融仲介機関

貸出市場での需給一致条件 (50) を用いると,

$$e_t^v = \frac{(1-\tau)m_t^b(1+x_t-m_t) - \tau(w_t l_t + r_t^k k_t / \mu_z)}{(1-v_t)(k_t / \mu_z)^\alpha (l_t)^{1-\alpha}}$$

と表すことができ, この式を対数線形近似すると,

$$\begin{aligned} & -\hat{e}_t^v - \frac{v}{1-v} \hat{v}_t + \left[-\alpha - \tau \frac{r^k k}{\mu_z \bar{n}} \right] \hat{k}_t + \left[-(1-\alpha) - \tau \frac{wl}{\bar{n}} \right] \hat{l}_t \\ & + \frac{(1-\tau)(1+x-m)m^b}{\bar{n}} \hat{m}_t^b + \frac{(1-\tau)m^b x}{\bar{n}} \hat{x}_t + \frac{-(1-\tau)m^b m}{\bar{n}} \hat{m}_t \\ & + \frac{-\tau wl}{\bar{n}} \hat{w}_t + \frac{-\tau r^k k}{\mu_z \bar{n}} \hat{r}_t^k = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

を得る. ただし,

$$\bar{n} = (1-\tau)m^b(1+x-m) - \tau(wl + r^k k / \mu_z).$$

実質超過準備を e_t^r とすると, 銀行の技術は

$$d_t = a_b (e_t^v)^{-\xi^b} e_t^r$$

と表せる. この関数の, e_t^r, l^b についての微分をそれぞれ $d_{e^r, t}, d_{l^b, t}$ とし, さらに $d_{p, z, t} \equiv d_{p, t} / z_t$ とすると,

$$d_{e^r, t} = (1 - \xi^b) a_b (e_t^v)^{-\xi^b},$$

$$d_{p, z, t} = a_b (1 - \alpha) \xi^b (e_t^v)^{1-\xi^b} \left(\frac{\mu_z l_t}{k_t} \right)^{-\alpha}.$$

これらに対数線形近似すると,

$$\hat{d}_{e^r, t} = -\xi^b \hat{e}_t^v \quad (84)$$

$$\hat{d}_{l^b, z, t} = (1 - \xi^b) \hat{e}_t^v - \alpha \hat{l}_t + \alpha \hat{k}_t \quad (85)$$

を得る.

(31) は

$$-(1 + R_t)w_t + \frac{R_t d_{l^b, z, t}}{1 + \tau d_{e^r, t}} = 0$$

と表せる. この式を対数線形近似して (84), (85) を使うと,

$$\frac{1}{1+R} \hat{R}_t - \hat{w}_t + \left(1 - \xi^b + \frac{\xi^b \tau d_{e^r}}{1 + \tau d_{e^r}} \right) \hat{e}_t^v - \alpha \hat{l}_t + \alpha \hat{k}_t = 0 \quad (86)$$

を得る.

(32) を対数線形近似して (84), (85) を使うと,

$$\hat{R}_t^D - d_{e^r} \left[\frac{1-\tau}{(1-\tau)d_{e^r} - 1} - \frac{\tau}{1+\tau d_{e^r}} \right] \xi^b \hat{e}_t^v - \hat{R}_t = 0 \quad (87)$$

を得る.

銀行の技術は

$$a_b(e_t^v)^{-\xi_b} e_{z,t}^r = m_t^b(1+x_t-m_t) + w_t l_t + \frac{r_t^k k_t}{\mu_z} \quad (88)$$

と表せる. ただし,

$$e_{z,t}^r \equiv \frac{e_t^r}{z_t} = (1-\tau)m_t^b(1+x_t-m_t) - \tau \left(w_t l_t + \frac{r_t^k k_t}{\mu_z} \right)$$

. (88) を対数線形近似すると,

$$\begin{aligned} & \xi^b \hat{e}_t^v + \left[\frac{m_1}{m_1+m_2} - \frac{(1-\tau)m_1}{(1-\tau)m_1-\tau m_2} \right] \left(\hat{m}_t^b + \frac{-m}{1+x-m} \hat{m}_t \right) \\ & + \left[\frac{wl}{m_1+m_2} + \frac{\tau wl}{(1-\tau)m_1-\tau m_2} \right] (\hat{w}_t + \hat{l}_t) \\ & + \left[\frac{r^k k/\mu_z}{m_1+m_2} + \frac{\tau r^k k/\mu_z}{(1-\tau)m_1-\tau m_2} \right] (\hat{r}_t^k + \hat{k}_t) = 0 \end{aligned} \quad (89)$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} m_1 &= m^b(1-m+x) \\ m_2 &= wl + r^k \frac{k}{\mu_z} \end{aligned}$$

である.

C.3 家計

(38), (39) より,

$$E_t \left[-\frac{1}{c_t} + \frac{\beta(1+R_{t+1}^D)}{\mu_z \pi_{t+1} c_{t+1}} \right] = 0.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$E_t \left[\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} - \hat{\pi}_{t+1} + \frac{R^D}{1+R^D} \hat{R}_{t+1}^D \right] = 0 \quad (90)$$

を得る.

(38), (40) より,

$$\zeta_t \psi_L \frac{1}{1-l_t} = \frac{w_t}{c_t}.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$\hat{\zeta}_t + \hat{l}_t + \hat{c}_t - \hat{w}_t = 0 \quad (91)$$

を得る.

(38), (41) より,

$$E_t \left[-\frac{1}{c_t} + \frac{\beta(r_{t+1}^k + 1 - \delta)}{\mu_z c_{t+1}} \right] = 0.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$E_t \left[\hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + \frac{r^k}{r^k + 1 - \delta} \hat{r}_{t+1}^k \right] = 0 \quad (92)$$

を得る.

(38), (42) より,

$$\frac{\theta v_t}{m_t m_t^b} = \frac{R_t^D}{c_t}.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$\hat{v}_t - \hat{m}_t - \hat{m}_t^b - \hat{R}_t^D + \hat{c}_t = 0 \quad (93)$$

を得る.

資本動学式 (37) は

$$k_{t+1} = (1 - \delta) \frac{k_t}{\mu_z} + i_t.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$\frac{1 - \delta}{\mu_z} \hat{k}_t + \frac{i}{k} \hat{i}_t - \hat{k}_{t+1} = 0 \quad (94)$$

を得る.

C.4 中央銀行

(45) より,

$$m_t^b = \frac{1 + x_{t-1}}{\pi_t \mu_z} m_{t-1}^b.$$

この式を対数線形近似すると,

$$\hat{m}_t^b - \hat{m}_{t-1}^b - \frac{x}{1+x} \hat{x}_{t-1} + \hat{\pi}_t = 0 \quad (95)$$

を得る. また, (46) はそのまま用いることができる.

C.5 最終財市場均衡

資源制約式 (47) より,

$$y_t = c_t + i_t.$$

この式を対数線形近似することにより,

$$\hat{y}_t - \frac{c}{y} \hat{c}_t - \frac{i}{y} \hat{i}_t = 0 \quad (96)$$

Yun(1996) によると, Y_t と K_t, l_t との関係は

$$Y_t = (z_t)^{1-\alpha} \varepsilon_t (\nu_t K_t)^\alpha (\nu_t l_t)^{1-\alpha} - \phi z_t$$

すなわち

$$y_t = v_t \varepsilon_t \left(\frac{k_t}{\mu_z} \right)^\alpha (l_t)^{1-\alpha} - \phi.$$

この式を対数線形近似すると,

$$\hat{y}_t = \frac{y+\phi}{y} \hat{v}_t + \frac{y+\phi}{y} \varepsilon_t + \alpha \frac{y+\phi}{y} \hat{k}_t + (1-\alpha) \frac{y+\phi}{y} \hat{l}_t \quad (97)$$

(96), (97) より,

$$\frac{c}{y+\phi} \hat{c}_t + \frac{i}{y+\phi} \hat{l}_t - \hat{v}_t - \hat{\varepsilon}_t - \alpha \hat{k}_t - (1-\alpha) \hat{l}_t = 0 \quad (98)$$

を得る.

付録 D モデルの解

モデルの解となる差分方程式 (53) を求める手法は以下の通り^{*21}.

3.2 節までの議論より, モデルは (52) と (44) の形にまとめることができる. モデルのパラメータと各内生変数の非確率的な定常状態の値を既知として, この合理的期待入りの連立差分方程式を z_{t-1} を所与として解き, **Policy function** を求める.

モデルの解は無数にあるが, 本論文において興味がある解は非確率的な定常状態の近傍で有界なものに限られる. 従ってここでは内生変数が発散しない条件として

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E_t z_{t+i} = 0 \quad (99)$$

を課す. 従って求めるべき解は

$$\tilde{z}_t = A \tilde{z}_{t-1} + B \Psi_t \quad (100)$$

が全ての $t \geq 0$ について成立するような $\{A, B\}$ である. 条件 (99) は A の固有値が絶対値で 1 より小さいことに対応する.

(44) を用いて (53) を再帰的に変形すると,

$$\tilde{z}_{t+1} = A^2 \tilde{z}_{t-1} + (AB + B\rho) \Psi_t + BD\varphi_{t+1}$$

これと (44) を (52) に代入して $E_t \varphi_{t+1} = 0$ を用いることにより,

$$(\alpha_0 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I) \tilde{z}_{t-1} + [\alpha_0 (AB + B\rho) + \alpha_1 B + \beta_0 \rho + \beta_1] = 0 \quad (101)$$

が任意の可能な \tilde{z}_{t-1} について成立する. この式が, 固有値が 1 より小さい A について成り立つには

$$\alpha_0 A^2 + \alpha_1 A + \alpha_2 I = 0 \quad (102)$$

$$\alpha_0 (AB + B\rho) + \alpha_1 B + \beta_0 \rho + \beta_1 = 0 \quad (103)$$

が必要である. 以下, まず (102) を満たす A を求め, その A の下で (103) を B について解く.

^{*21} Cristiano [2002] に若干の変化を加えている.

D.1 A の導出

(102) は Ψ_t の 2 次モーメントを含んでいない。従って A を求める際には Ψ_t を任意に取ってよい。そこで、 $\Psi_t \equiv 0, \forall t \geq 0$ とおく。すると (52) は

$$\alpha_0 \tilde{z}_{t+1} + \alpha_1 \tilde{z}_t + \alpha_2 \tilde{z}_{t-1} = 0$$

となる。ここで 30×1 ベクトル Z_t を

$$Z_t = \begin{pmatrix} \tilde{z}_t \\ \tilde{z}_{t-1} \end{pmatrix}$$

と定義すると、上式は一階の差分方程式

$$aZ_{t+1} + bZ_t = 0 \quad (104)$$

に書き換えることができる。ここで a, b はそれぞれ

$$a \equiv \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad b \equiv \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

と定義される 30×30 行列であり、 I は 15×15 の単位行列である。この差分方程式の解は、初期条件を満たし、かつ全ての $t \geq 0$ に対して (104) を満たす $\{Z_t | t \geq 0\}$ である。 a が正則であるならばこの差分方程式は再帰的に解けて、全ての解は

$$Z_t = (-a^{-1}b)^t Z_0 \quad (105)$$

を満たす。しかしながら本モデルでは a は正則ではなかった。そこで以下の処理を施してこの差分方程式を解く。

まず a, b を QZ 分解と施す。QZ 分解とは、適当な正規直交行列 Q, Z ^{*22} と上三角行列 H_0, H_1 を用いて

$$QaZ = H_0$$

$$QbZ = H_1$$

とする分解である。ここで H_0 は対角成分は右下部分にゼロを集めてある^{*23}。本モデルではゼロとなる対角成分は 12 個であった。 H_0, H_1 の左上 18×18 の部分をそれぞれ G_0, G_1 とする。すると G_0 は正則であり、 H_1 の対角成分左下 12 個は非零である。 $\gamma_t = Z'Z_t$ とすると、(104) は

$$H_0\gamma_{t+1} + H_1\gamma_t = 0 \quad (106)$$

と書ける。

ここで γ_t を上から $16 \times 1, 2 \times 1, 12 \times 1$ に分けて

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \\ \gamma_t^3 \end{pmatrix}$$

^{*22} つまり、

$$QQ' = Q'Q = I \\ ZZ' = Z'Z = I$$

である。

^{*23} この操作は Sims [2000] において使われるプログラム qzdiv.m によって行った。

と表すと, (106) より $\gamma_t^3 = 0, t \geq 0$ である. この式は, Z' を $16 \times 30, 2 \times 30, 12 \times 30$ に分けて

$$Z' = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$$

と表すことにより

$$L_3 Z_t = 0 \quad (107)$$

と表せる. よって (106) は

$$G_0 \begin{pmatrix} \gamma_{t+1}^1 \\ \gamma_{t+1}^2 \end{pmatrix} + G_1 \begin{pmatrix} \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (108)$$

に減らすことができる. G_0 は正則であるから, この差分方程式は

$$\begin{pmatrix} \gamma_t^1 \\ \gamma_t^2 \end{pmatrix} = -(G_0)^{-1} G_1 \begin{pmatrix} \gamma_{t-1}^1 \\ \gamma_{t-1}^2 \end{pmatrix} \quad (109)$$

と書ける. ここで $G = -(G_0)^{-1} G_1$ とし,

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$

と部分行列に分ける. ただし, $G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ はそれぞれ $16 \times 16, 16 \times 2, 2 \times 16, 2 \times 2$ 行列である. 計算の結果, G の下 2 行はゼロ行列であった. よって (108) より, $t \geq 1$ に対して $\gamma_t^2 = 0$ であることが分かる. したがって $t \geq 1$ に対して

$$\gamma_{t+1}^1 = G_{11} \gamma_t^1 \quad (110)$$

すなわち

$$\gamma_t^1 = (G_{11})^{t-1} \gamma_1^1$$

ここで $G_{11} = P \Lambda P^{-1}$ と固有値分解すると,

$$P^{-1} \gamma_t^1 = \Lambda^{t-1} P^{-1} \gamma_1^1 \quad (111)$$

Λ の固有値は, パラメータ推定によれば 1 を超えるものがちょうど 3 個である. ここで P^{-1} の, Λ の固有値のうち 1 を超えるものに対応する 3 個の行からなる 3×16 行列を \tilde{p} とする. γ_t^1 が発散しないためには $\tilde{p} \gamma_t^1 = 0$ が必要で (よって上式から $\tilde{p} \gamma_t^1 = 0, t \geq 1$), これは

$$\tilde{p} [G_{11} \gamma_0^1 + G_{12} \gamma_0^2] = 0 \quad (112)$$

と書ける. この式から, $t \geq 1$ についても (110) より

$$\tilde{p} [G_{11} \gamma_t^1 + G_{12} \gamma_t^2] = \tilde{p} \gamma_{t+1}^1 = 0$$

が導かれるので, 結局 $t \geq 0$ に対して

$$\tilde{p} [G_{11} L_1 + G_{12} L_2] Y_t = 0 \quad (113)$$

が得られる. よって, 行列 D を

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{p} (G_{11} L_1 + G_{12} L_2) \\ L_3 \end{bmatrix}$$

とすると, (107), (113) より $DZ_t = 0$ となる. よって D の左右 15 列からなる行列をそれぞれ D_1, D_2 とすると $D_1 z_t + D_2 z_{t-1} = 0$ となるから,

$$z_t = -(D_1)^{-1} D_2 z_{t-1}$$

が得られ, これより $A = -(D_1)^{-1} D_2$ と分かる. また, 非発散解の初期値 z_{-1} は (107), (112) の 15 個の条件から unique に決まる.

D.2 B の導出

上述の手法で A を求め, その条件の下で (103) を使って B を求める. 以下では行列 $X = [x_1, \dots, x_n]$ (x_i は X の第 i 列を表す列ベクトル) に対して

$$\text{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Kronecker テンソル積を表す演算子を \otimes とする^{*24}.

(103) の左辺を F とおくと,

$$\text{vec}(F') = \text{vec}(\beta'_1) + [Q_0 \otimes \rho' + Q_1 \otimes I] \text{vec}(B') = 0$$

となる. ただしここで,

$$\begin{aligned} Q_0 &= \alpha_0 \\ Q_1 &= \alpha_0 A + \alpha_1 \end{aligned}$$

である. よってここから

$$\text{vec}(B') = -[Q_0 \otimes \rho' + Q_1 \otimes I]^{-1} \cdot \text{vec}(\beta'_1) \quad (114)$$

によって B が得られる.

^{*24} A を $m \times n$ 行列, B を $p \times q$ 行列とすると, Kronecker テンソル積 $A \otimes B$ は $mp \times nq$ 行列

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & \dots & A_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}$$

と定義される. ただし, A_{ij} は A の第 i 行第 j 列要素である

参照文献

- [1] Adda, J. and R. Cooper [2003], *Dynamics Economics: Quantitative Methods and Applications*, The MIT Press.
- [2] Altig, D., L. J. Christiano, M. Eichenbaum and J. Linde [2003], "Technology Shocks and Aggregate Fluctuations", manuscript.
<http://www.e.u-tokyo.ac.jp/cirje/research/workshops/macro/macro-paper03/christiano.pdf>
- [3] Basu, S. and J. Fernald [1994], "Constant Returns and Small Markups in US Manufacturing", *International Finance Discussion Paper*, No.483.
- [4] Bernanke, B., M. Gertler and S. Gilchrist [1999], "The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework", in J. B. Taylor and M. Woodford, ed., *Handbook of Macroeconomics*, 1999, Elsevier Science, pp. 1341-93.
- [5] Blanchard, O. J. and C. M. Kahn [1980], "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations", *Econometrica*, 48, pp.1305-1312.
- [6] Burmeister, E. and K. D. Wall [1982], "Kalman Filtering Estimation of Unobserved Rational Expectations with An Application to The German Hyperinflation", *Journal of Econometrics*, 20, pp. 255-284.
- [7] Burnside, C. [1999], "Real Business Cycle Models: Linear Approximation and GMM Estimation", World Bank.
<http://dge.repec.org/codes/burnside/rbc.zip>
- [8] Calvo, G. [1983], "Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework", *Journal of Monetary Economics*, 12, 1983, pp. 383-398.
- [9] Chari, V. V., L. J. Christiano and M. Eichenbaum [1995], "Inside Money, Outside Money, and Short-Term Interest Rates", *Journal of Money, Credit and Banking*, 27, pp. 1354-1386.
- [10] Christiano, L. J. [2002], "Solving Dynamic Equilibrium Models by a Method of Undetermined Coefficients", *Computational Economics*, 20, pp. 21-55.
- [11] Christiano, L. J., M. Eichenbaum and C. Evans [2005], "Nominal Rigidities and The Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy", *Journal of Political Economy*, 113, pp. 1-45.
- [12] Christiano, L. J., R. Motto and M. Rostagno [2004], "The Great Depression and The Friedman-Schwartz Hypothesis", *National Bureau of Economic Research Working Paper*, 10255.
- [13] Clarida, R., J. Gali and M. Gertler [1999], "The Science of Monetary Policy: A New Keynesian Perspective", *American Economic Review*, 67, pp. 1661-1707.
- [14] Cooley, T. F. [1995] *Frontiers of Business Cycle Research*, Princeton University Press, 1995.
- [15] Cooley, T. F. and E. C. Prescott [1995], "Economic Growth and Business Cycles", in T. F. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*, 1995, Princeton University Press, pp.1-38.
- [16] Dixit, A. K. and J. E. Stiglitz [1977], "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review*, 67, pp. 297-308.
- [17] Eggertsson, G. B. and M. Woodford [2003], "The Zero Bound on Interest Rates and Optimal Monetary Policy", *Brooking Papers on Economic Activity*, 1, pp.139-233.

- [18] Erceg, C. J., D. W. Henderson and A. T. Levin [2000], “Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts”, *Journal of Monetary Economics*, 46, pp. 281-313.
- [19] Hall, R. [1988], “The Relation Between Price and Marginal Cost in U.S. Industry”, *Journal of Political Economy*, 96, pp. 921-947.
- [20] Hamilton, J. B. [1994], *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- [21] Hayashi, F. and E. C. Prescott [2000], “The 1990s in Japan: A Lost Decade”, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Working Paper*, 607.
- [22] Keynes, J. M. [1936], *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Macmillan.
- [23] Krugman, P. R. [1998] “It’s Baaack! Japan’s Slump and the Return of the Liquidity Trap”, *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, pp. 137-187.
- [24] Jung, T., Y. Teranishi and T. Watanabe [2005], “Optimal Monetary Policy at the Zero-Interest-Rate Bound”, *Journal of Money, Credit and Banking*, 37, pp. 813-835.
- [25] Kydland, F. E. and E. C. Prescott [1982], “Time to Build and Aggregate Fluctuations”, *Econometrica*, 50, pp. 1345-1370.
- [26] Ljungqvist, L. and T. J. Sargent [2004], *Recursive Macroeconomic Theory*, 2nd ed., MIT Press.
- [27] Lucas, R. E., Jr. [1976], “Econometric Policy Evaluation: A Critique”, *Journal of Monetary Economics Supplementary Series*.
- [28] Miranda, M. J. and P. L. Fackler [2002], *Applied Computational Economics and Finance*, MIT Press.
- [29] Murphy, K. [1998], “Kalman Filter Toolbox for Matlab”(Matlab Program).
<http://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Software/Kalman/kalman.html>
- [30] Nakajima, T. [2005], “Liquidity Trap and Optimal Monetary Policy in Open Economies”, Working Paper.
<http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/research/ltoe.pdf>
- [31] Nakajima, T. [2003], “Asset Price Fluctuations in Japan: 1980-2000”, Working Paper.
http://www.kier.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/research/jland_v2.pdf
- [32] Nishimura, K., Y. Ohkusa and K. Ariga [1999], “Estimating the Mark-up over Marginal Cost: a Panel Analysis of Japanese Firms 1971-1994”, *International Journal of Industrial Organization*, 17, pp. 1077-1111.
- [33] Rotemberg, J. J. and M. Woodford [1995], “Dynamic General Equilibrium Models with Imperfectly Competitive Product Markets”, in T. F. Cooley, ed., *Frontiers of Business Cycle Research*, 1995, Princeton University Press, pp.243-293.
- [34] Sims, C. A. [2000], “Solving Linear Rational Expectation Models”, Unpublished manuscript, Princeton University.
<http://sims.princeton.edu/yftp/gensys/>
- [35] Woodford, M.[2003], *Interest and Prices: Foundations of a Theory of Monetary Policy*, Princeton University Press.
- [36] Yun, T. [1996], “Nominal Price Rigidity, Money Supply Endogeneity, and Business Cycles”, *Journal of Monetary Economics*, 37, pp. 345-370.
- [37] 乾 友彦, 権 赫旭 [2004], 「展望: 日本の TFP 上昇率は 1990 年代においてどれだけ低下したか」, 『ESRI Discussion Paper Series』, No.115, 内閣府経済社会総合研究所.
- [38] 大日 康史 [1991], 「Real Business Cycle 理論の日本経済への適用可能性」, 『経済学論叢』, 第 42 巻, 第 2

号, 同志社大学, 32-62 ページ.

[39] 外木 暁幸 [2002], 「実物的景気循環, 貨幣, そして日本経済の研究」, 一橋大学大学院経済学研究科修士論文.